Caduta libera in un mezzo resistente

di Erasmo Modica

Viene di seguito proposto un problema di applicazione delle equazioni differenziali alla fisica, in cui l'obiettivo è la determinazione del modello che fornisce la velocità di caduta di un corpo in un mezzo resistente in funzione del tempo.

Unità di apprendimento in cui inserire l'attività: equazioni differenziali

Contesto: 5° anno del Liceo Scientifico

Collegamenti interdisciplinari: fisica

Concetti-chiave in lingua inglese: differential equations, force, friction

Competenza: Avere padronanza degli strumenti matematici per la costruzione di modelli

Conoscenze:
- Concetto di equazioni differenziale
- Immagini
- Logaritmi e loro proprietà
- Accelerazione come derivata della velocità
- Proprietà degli integrali
- Secondo principio della dinamica

Abilità:
- Risolvere equazioni logaritmiche
- Integrazione immediata
- Risolvere equazioni differenziali
- Applicare il secondo principio della dinamica per determinare l'accelerazione di un corpo

Problema. *Un corpo sferico di massa 200 g cade in un mezzo viscoso. Sapendo che quest'ultimo si manifesta mediante una forza frenante direttamente proporzionale alla velocità del corpo in caduta, secondo un coefficiente $\lambda = 0{,}2\ N \cdot s/m$, determinare:*

a) *l'espressione della velocità in funzione del tempo;*
b) *la velocità del corpo dopo 4 s;*
c) *la velocità limite.*

Risoluzione

Immaginiamo che il corpo sferico cada nel messo viscoso e indichiamo con l'espressione:

$$\vec{F}_R = -\lambda \vec{v}$$

la forza frenante che agisce su di esso, il cui modulo è direttamente proporzionale a quello della velocità di caduta e in cui $\lambda > 0$ è una costante che dipende dal mezzo viscoso. Il segno meno che compare nella relazione, indica che tale forza frenante si oppone al verso della velocità.

Il corpo è quindi sottoposto a questa forza e alla forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ rivolta verso il centro della Terra.
Applicando la seconda legge di Newton si ottiene:

$$P - F_R = ma$$

Sostituendo le espressioni delle due forze a primo membro, otteniamo:

$$mg - \lambda v = ma$$

Ricordando che l'accelerazione è la rapidità di variazione della velocità nel tempo, cioè che:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

dalla precedente relazione si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \lambda v$$

ossia:

$$\frac{m}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{mg}{\lambda} - v$$

e quindi:

$$\frac{dv}{\frac{mg}{\lambda} - v} = \frac{\lambda}{m} dt$$

Integrando ambo i membri:

$$\int \frac{dv}{\frac{mg}{\lambda} - v} = \int \frac{\lambda}{m} dt$$

si ottiene:

$$-\ln\left(\frac{mg}{\lambda} - v\right) = \frac{\lambda}{m} t + c$$

da cui:

$$\frac{mg}{\lambda} - v = e^{-\frac{\lambda}{m}t + c}$$

Ponendo $e^c = k$, possiamo determinare la velocità dalla precedente relazione:

$$v(t) = \frac{mg}{\lambda} - ke^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

Supponendo che all'istante iniziale il corpo sferico sia fermo, cioè che $v(0) = 0$, dalla relazione precedente possiamo determinare il valore della costante k come segue:

$$\frac{mg}{\lambda} - k = 0$$

cioè:

$$k = \frac{mg}{\lambda}$$

In definitiva, l'espressione della velocità di caduta in funzione del tempo sarà la seguente:

$$v(t) = \frac{mg}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)$$

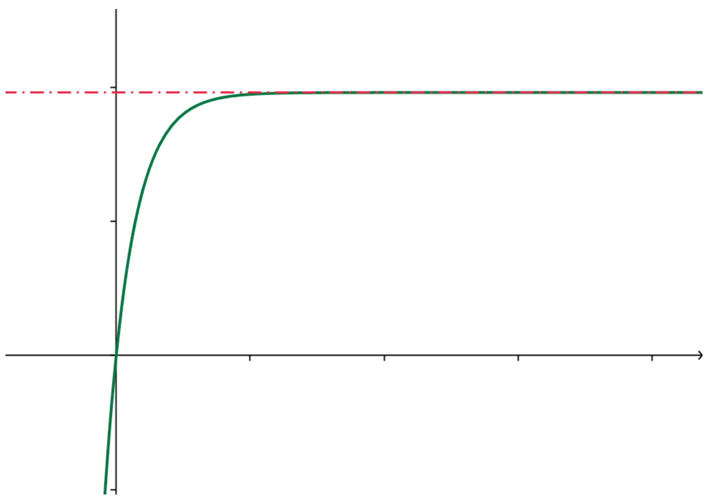
Inserendo i valori dati nel problema otteniamo la funzione:

$$v(t) = 9{,}81 \cdot (1 - e^{-t})$$

Per determinare la velocità del corpo dopo 2 s, è sufficiente determinare l'immagine di 2 tramite la funzione precedente, ossia:

$$v(2\ s) = 9{,}81 \cdot (1 - e^{-2}) = 6{,}2\ m/s$$

La rappresentazione grafica della funzione è la seguente:



Dal grafico notiamo che la velocità ha un asintoto orizzontale che si può determinare mediante il seguente limite:

$$\lim_{t \to \infty}\left[\frac{mg}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)\right] = \left(\frac{mg}{\lambda}\right)^{-}$$

Nel nostro caso, questo limite ci permette di determinare l'asintoto di equazione:

$$y = 9{,}81$$

Quindi il valore $v = 9{,}81\ m/s$ rappresenta la velocità limite.