


Ministero dell'istruzione e del merito
A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE
Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:

 LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
 LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.
PROBLEMA 1

 Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

- a) Verificare che tutte le curve rappresentate dalle funzioni della famiglia $f_n(x)$ passano per uno stesso punto e scrivere le sue coordinate. Determinare, in funzione del parametro n , le ascisse degli estremi e dei flessi e calcolarne il limite, con $n \rightarrow \infty$. Scrivere le equazioni degli asintoti e tracciare i grafici delle funzioni f_n , evidenziando le differenze tra i casi in cui n è pari da quelli in cui n è dispari.
- b) Si assuma $n = 3$, studiare la funzione $f_3(x)$ e si tracciare un suo grafico rappresentativo, dimostrando che ammette un unico zero di segno negativo. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f_3(x) = k$.
- c) Si consideri la funzione $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$ e verificare che, $\forall x > 0$, vale la disuguaglianza $f_n(x) > g(x)$, indipendentemente dal valore di n . Si consideri l'integrale

$$I(t) = \int_1^t (f_n(x) - g(x)) dx,$$

che esprime l'area della regione delimitata dai grafici delle funzioni f_n e g e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = t$, $t > 1$. Si calcolino $I(t)$ e il $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

- d) Calcolare il $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - 2}{g(x) - 2}$
 e verificare che il risultato non dipende da $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

PROBLEMA 2

 Si considerino le famiglie di funzioni $f_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$ e $g_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$ con a parametro reale positivo.

- a) Si traccino, al variare del parametro, i grafici rappresentativi γ_f e γ_g delle funzioni $f_a(x)$ e $g_a(x)$ evidenziando simmetrie, estremi e flessi.
- b) Siano P e Q due punti, rispettivamente su γ_f e γ_g , aventi la stessa ascissa positiva, P' e Q' le loro proiezioni sull'asse delle ordinate. Si individui il valore del parametro a in corrispondenza del quale la massima area del rettangolo $PQ'Q'P'$ vale e^{-1} .

 D'ora in avanti, si assuma $a = 1$.



Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:

LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
 LIB2, LIC2, LID2, LI2, LI3, LI4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

- c) Verificare l'identità $g^2(x) - f^2(x) = 1$ e determinare il numero intero per cui $50 \leq g(x) - f(x) \leq 100$. Specificare quale, tra $f(x)$ e $g(x)$, è una funzione invertibile in \mathbb{R} e ricavare l'espressione analitica della funzione inversa.
- d) Determinare l'equazione $y = P(x)$ della parabola γ avente il vertice nel punto di minimo assoluto della funzione $g(x)$ e retta tangente, per $x = 1$, parallela alla retta di equazione $2x + y = 0$. Calcolare l'area della regione finita R delimitata da γ , dal grafico di $g(x)$ e dalle rette di equazione $x = \pm 1$. Verificare che l'area di R può essere approssimata con quella del triangolo isoscele inscritto nel segmento parabolico delimitato da γ e dall'asse delle ascisse.

QUESITI

- Nel triangolo ABC , l'ampiezza di uno dei tre angoli è la metà di un secondo angolo del triangolo ed è pari al triplo del terzo angolo. Detti A' , B' , C' i punti di tangenza tra i lati di ABC ed il suo cerchio inscritto, determinare le ampiezze degli angoli del triangolo $A'B'C'$.
- Una classe è formata da 18 studenti; durante la lezione di musica, vengono creati (in modo completamente casuale) tre gruppi formati rispettivamente da 5, 6 e 7 studenti. Se Alice, Barbara e Chiara sono tre studentesse della classe, determinare la probabilità che solo due di loro facciano parte di uno stesso gruppo.

- Assegnate le rette $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$, $s : \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$ con t parametro reale, determinare

l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo ad s .

- Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata di diagonale fissata d , dimostrare che il cubo è quello di volume massimo.


Ministero dell'istruzione e del merito
A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE
Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:

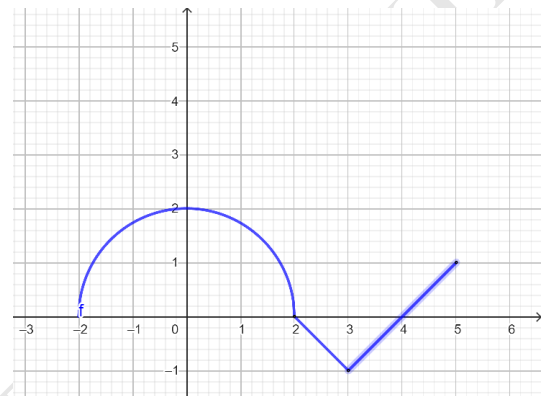
 LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
 LIB2, LIC2, LID2, LI2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

5. Determina l'equazione della funzione dispari che ha un solo flesso a tangente orizzontale e la cui derivata seconda è $f'' = -10x^3 + 12x$.

6. Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$ con $x \in [-2; 5]$, dove f è la funzione rappresentata in figura, ottenuta dall'unione di una semicirconferenza e due segmenti.

Calcolare $F(-2)$, $F(2)$, $F(3)$ e $F(5)$.



7. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \frac{x|x+1|}{x^3-x}$ e stabilire la tipologia delle sue discontinuità.

8. Si considerino le seguenti affermazioni sulla funzione $y = f(x)$.

A: " $f(x)$ è derivabile per $x = x_0$ "

B: " $f(x)$ è continua per $x = x_0$ "

Indicare quali, tra le seguenti affermazioni, non costituisce un teorema. Spiegare la scelta effettuata anche attraverso opportuni controesempi.

$A \Rightarrow B$ (Se A allora B)

$B \Rightarrow A$ (Se B allora A)

$A \Leftrightarrow B$ (B se e solo se A)

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico. (Nota MIM n. 9305 del 20 marzo 2023).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.