
Introduzione alla geometria



Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" - Palermo
Prof.re E. Modica



Origine del termine

La **geometria** (dal greco antico *γεωμετρία*, composto da *γεω*, *geo* = "terra" e *μετρία*, *metria* = "misura", tradotto quindi letteralmente come *misurazione della terra*) è quella parte della matematica che si occupa delle forme nel piano e nello spazio e delle loro mutue relazioni.



Il Saggiatore, Galileo Galilei (1564-1642)

"La filosofia naturale è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l'universo, ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto."



Euclide di Alessandria (ca. 325 a.C. - ca. 265 a.C)

- **Euclide** è il più importante matematico dell'antica Grecia, che visse (probabilmente) durante il regno di Tolomeo I (367 a.C. ca. - 283 a.C.).
- Della sua vita **si sa molto poco**, ma l'importanza delle sue opere ha fatto sì che la sua fama lo seguisse fino ai giorni nostri, al punto da considerarlo il più importante docente di matematica di tutti i secoli!
- Il suo nome è legato alla sua opera più famosa: gli ***Elementi***, che costituiscono la più grande e completa opera di geometria dell'antichità.
- L'attività principale del matematico si colloca all'inizio del **III secolo a.C.** e ci fa supporre che Tolomeo lo abbia chiamato ad operare nella ***Biblioteca di Alessandria*** e nell'annesso Museo.

Gli Elementi



Frontespizio degli Elementi di Euclide, tradotto da Adelardo in latino.

- Gli **Elementi** (in greco Στοιχεῖα) di Euclide sono la più importante opera matematica giunta dalla cultura greca antica.
- Furono **composti tra il IV e il III secolo a.C.**
- Rappresentano un quadro completo e definito dei principi della geometria noti al tempo.
- L'opera servì come testo fondamentale nell'antichità e nel medioevo ed è stata **usata come libro scolastico di geometria** fino a tempi non troppo lontani da noi.
- La sua considerazione presso i Romani fu modesta, ma fu grandissima presso i Bizantini e gli **Arabi**. Proprio questi ultimi la introdussero nuovamente in Europa grazie alla traduzione di Adelardo di Bath (secolo XII).



Com'è strutturata l'opera

L'opera consiste in 13 libri: i primi sei riguardanti la **geometria piana**, i successivi quattro i **rapporti tra grandezze** e gli ultimi tre la **geometria solida**.

I diversi libri sono strutturati in:

- **Definizioni** (*Horoì*);
- **Nozioni comuni** (*Koinai Ennoai*);
- **Postulati** (*Aitemata*).



Tematiche dei libri che compongono gli Elementi

- ❖ **Libro I:** I fondamenti della geometria in 23 Definizioni, 5 Postulati, 5 Assiomi e 48 Teoremi
- ❖ **Libro II:** L'algebra geometrica in 2 definizioni e 13 teoremi
- ❖ **Libro III:** La teoria dei cerchi in 11 definizioni e 37 teoremi
- ❖ **Libro IV:** Le costruzioni per figure inscritte e circoscritte in 7 definizioni e 16 teoremi
- ❖ **Libro V:** La teoria delle proporzioni in 18 definizioni e 25 teoremi
- ❖ **Libro VI:** Le figure simili e le proporzioni in geometria in 11 definizioni e 37 teoremi
- ❖ **Libro VII:** I fondamenti della teoria dei numeri in 22 definizioni e 39 teoremi
- ❖ **Libro VIII:** Le proporzioni continue nella teoria dei numeri in 27 teoremi
- ❖ **Libro IX:** La teoria dei numeri in 36 teoremi
- ❖ **Libro X:** La classificazione degli incommensurabili in 16 definizioni, e 115 teoremi
- ❖ **Libro XI:** La geometria solida in 28 definizioni e 39 teoremi
- ❖ **Libro XII:** La misura delle figure in 18 teoremi
- ❖ **Libro XIII:** I solidi regolari in 18 teoremi



Teoria scientifica in forma assiomatica

Si dice che una teoria scientifica è **presentata in forma assiomatica**, se le sue proprietà sono poste in un ordine logico tale che si possa dimostrare che esse sono conseguenza di un certo numero di proposizioni iniziali, dette assiomi.



Sistema assiomatico materiale

Gli *Elementi* costituiscono l'esempio più antico di "**sistema assiomatico materiale**". Di seguito si riporta lo schema di un sistema assiomatico.

1. Vengono introdotti i **concetti primitivi**, ovvero tutti quei concetti su cui si basa la teoria (in geometria: punto, retta, piano).
2. Viene dato un insieme di enunciati che riguardano i termini primitivi, detti **assiomi (postulati)**, che sono delle verità evidenti e che non possono essere dimostrate.
3. Viene data una lista di termini tecnici, detti **definizioni**, che non sono primitivi e che servono a definire enti nuovi sulla base di quelli già noti.
4. Vengono formulati degli enunciati, detti **teoremi**, che si deducono logicamente dalle definizioni e dagli assiomi.



Sistema assiomatico

- I **concetti primitivi** sono tutti quei concetti semplici e intuitivamente noti, che non ammettono definizioni.
- Gli **assiomi**, chiamati da Euclide **nozioni comuni**, sono delle proprietà evidenti che sono applicabili a tutte le scienze.
- I **postulati** sono delle proprietà evidenti che riguardano gli enti primitivi e che non vengono dimostrate.
- Le **definizioni** sono delle proposizioni che servono a introdurre nuovi enti (ad esempio: un segmento è una parte di retta delimitata da due punti).



Sistema assiomatico

- I **teoremi** sono delle proposizioni che devono essere dimostrate e sono costituiti da tre parti:
 - **ipotesi**: ciò che si accetta per vero;
 - **tesi**: ciò che si vuole dimostrare;
 - **dimostrazione**: insieme di deduzioni logiche che a partire dalle ipotesi portano alla tesi.



Caratteristiche dei postulati

I postulati devono inoltre essere **coerenti**, ovvero non devono essere tra loro contraddittori, e **indipendenti** tra loro.



Definizioni (Libro I, edizione Heath del 1956)

DEF. 1 **Punto** è ciò che non ha parti.

DEF. 2 **Linea** è lunghezza senza larghezza.

DEF. 3 **Estremi** di una retta sono i punti.

DEF. 4 **Linea retta** è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.

DEF. 23 **Parallele** sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate indefinitamente in entrambe le direzioni, non si incontrano fra loro in nessuna di queste.



Nozioni comuni

Noz. com. 1 Le cose che sono uguali a una stessa cosa sono anche uguali fra loro.

Noz. com. 2 E se a cose uguali si aggiungono cose uguali, le somme sono uguali.

Noz. com. 3 E se da cose uguali si sottraggono cose uguali, i resti sono uguali.

Noz. com. 4 E le cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.

Noz. com. 5 E tutto è maggiore della parte.



Primo postulato di Euclide (P1)

POST. 1 Risulti postulato: che da qualsiasi punto si possa condurre una retta a ogni altro punto.



Postulato della riga



Secondo postulato di Euclide (P2)

POST. 2 E che si possa prolungare una linea retta finita continuamente in linea retta.

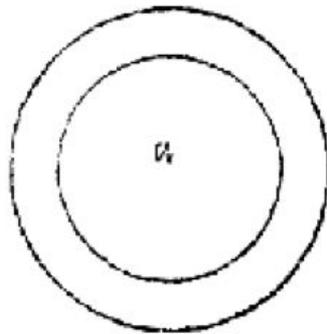


$d \quad \overline{a \quad b} \quad c$

Postulato della riga

Terzo postulato di Euclide (P3)

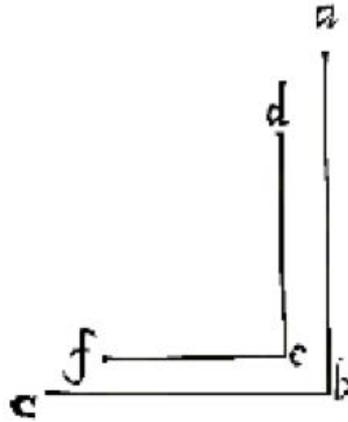
POST. 3 E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza.



Postulato del compasso

Quarto postulato di Euclide (P4)

POST. 4 E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.



Quinto postulato di Euclide (P5)

POST. 5 E che se una retta, venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due angoli retti, le due rette, prolungate indefinitamente, si incontrano dalla parte in cui sono i due angoli minori di due angoli retti.

