DIVISIONE DI POLINOMI E REGOLA DI RUFFINI

Divisione di polinomi, teorema del resto e teorema di Ruffini

Teorema ***(della divisione con resto tra due polinomi in una variabile)*****. Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, con $B(x) \neq 0$, esistono sempre, e sono unici, due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:**

$$\boldsymbol{A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)}$$

dove $R(x)$ o è il polinomio nullo o è un polinomio che ha grado minore del grado di $B(x)$.

Procedimento per la determinazione del quoziente e del resto della divisione

1. **Ordinare** i polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile e, qualora il polinomio dovesse essere *incompleto*, inserire i termini mancanti con i termini che hanno coefficiente uguale a zero.
2. **Dividere** il termine di grado massimo del polinomio dividendo per il termine di grado massimo del polinomio divisore. In questo modo di ottiene il primo termine del polinomio quoziente.
3. **Moltiplicare** il primo termine del polinomio quoziente per tutti i termini del polinomio divisore e sommare il polinomio ottenuto, con i segni cambiati, al polinomio dividendo. Il polinomio che si ottiene prende il nome di **primo resto parziale**.
4. Se il resto parziale ha grado minore del polinomio divisore, allora la divisione è terminata. Diversamente si devono ripetere i passaggi descritti nei punti 2 e 3, considerando come nuovo polinomio dividendo il primo resto parziale. Il procedimento si arresta quando verrà determinato un resto parziale avente grado inferiore rispetto al polinomio divisore. Quest'ultimo sarà il **resto** della divisione.

Teorema del resto. Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ di grado maggiore o uguale a 1 per un binomio del tipo $(x-a)$ è uguale al valore che il polinomio assume quando al posto dell'indeterminata *x* si sostituisce il valore *a*.

Dimostrazione

Per il teorema della divisibilità dei polinomi esistono $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$A(x) = Q(x) \cdot (x-a) + R(x)$$

Poiché il divisore ha grado uno, il resto deve avere grado zero, cioè sarà un numero che indicheremo con la lettera *R*.
Quindi si avrà:

$$A(x) = Q(x) \cdot (x-a) + R$$

Essendo l'uguaglianza vera per qualsiasi valore di *x*, in particolare sarà vera quando $x = a$ e quindi si ha:

$$A(a) = Q(a) \cdot (a-a) + R$$

da cui seguirà che:

$$R = A(a)$$

Teorema di Ruffini. Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $A(x)$ sia divisibile per un binomio del tipo $(x-a)$ è che risulti $A(a)=0$.

Dimostrazione

Prima implicazione

Ipotesi: $A(x)$ è divisibile per $(x-a)$ **Tesi**: $A(a)=0$

Se $A(x)$ è divisibile per $(x-a)$, allora esiste $Q(x)\neq 0$ (il resto è nullo) tale che:

$$A(x)=\ Q(x)\cdot(x-a)$$

Essendo l'uguaglianza vera per qualsiasi valore di x, in particolare sarà vera quando $x=a$ e quindi si ha:

$$A(a)=\ Q(a)\cdot(a-a)$$

da cui seguirà che:

$$A(a)=0$$

Seconda implicazione

Ipotesi: $A(a)=0$ **Tesi**: $A(x)$ è divisibile per $(x-a)$

Poiché, per il teorema del resto, il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il binomio $(x-a)$ è $R=A(a)$ e poiché, per ipotesi, $A(a)=0$, ne segue che $R=0$. Per definizione di divisibilità, essendo il resto della divisione pari a zero, segue che $A(x)$ è divisibile per $(x-a)$.

Estensione della regola di Ruffini

Il teorema della divisione fra due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, con $B(x)\neq 0$, ci assicura che esistono sempre due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$$

dove $R(x)$ o è il polinomio nullo o è un polinomio che ha grado minore del grado di $B(x)$.

Se il polinomio $B(x)=nx-a$, allora:

$$A(x)=Q(x)\cdot(nx-a)$$

Dividendo ambo i membri per n, otteniamo:

$$\frac{A(x)}{n}=\frac{Q(x)\cdot(nx-a)}{n}+\frac{R}{n}$$

da cui:

$$\frac{A(x)}{n} = Q(x)\left(x - \frac{a}{n}\right) + \frac{R}{n}$$

Notiamo che **il quoziente non cambia**, ma risultano divisi per *n* sia il dividendo, che il resto.

Quindi, per effettuare la regola di Ruffini nel caso in cui si voglia dividere un polinomio $A(x)$ per un binomio $B(x) = nx - a$ è necessario:

1. dividere per *n* tutti i coefficienti dei monomi che compongono il polinomio $A(x)$;
2. dividere per *n* tutti i coefficienti dei monomi che compongono il polinomio $B(x)$, che diventerà quindi della forma $x - \frac{a}{n}$;
3. effettuare regola di Ruffini tra questi due nuovi polinomi ottenuti;
4. il quoziente di questa divisione è lo stesso di quello della divisione fra $A(x)$ e $B(x) = nx - a$, mentre il resto di questa divisione, moltiplicato per *n*, darà il resto della divisione di partenza.

Teorema. Data l'equazione:

$$\boldsymbol{a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0}$$

con $\boldsymbol{a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}}$, ogni sua eventuale soluzione razionale $\boldsymbol{\frac{p}{q}}$ è tale che $\boldsymbol{p}$ sia un divisore di $\boldsymbol{a_0}$ e $\boldsymbol{q}$ sia un divisore di $\boldsymbol{a_2}$.

Dimostrazione

Sia $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con *p* e *q* primi tra loro, una soluzione dell'equazione data. Si ha:

$$a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

cioè:

$$a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Moltiplicando ambo i membri per q^2 si ottiene:

$$a_2p^2 + a_1pq + a_0q^2 = 0$$

- ✓ Ricavando il termine a_0q^2, otteniamo: $a_0q^2 = -a_2p^2 - a_1pq = p(-a_2p - a_1q)$, cioè il termine a_0q^2 risulta essere un multiplo di p. Poiché q^2 non è un multiplo di p, in quanto abbiamo supporto *p* e *q* primi tra loro, deve essere a_0 multiplo di p.
- ✓ Analogamente, ricavando il termine a_2p^2, otteniamo: $a_2p^2 = q(-a_1p - a_0q)$, cioè il termine a_2p^2 risulta essere un multiplo di q. Poiché p^2 non è un multiplo di q, in quanto abbiamo supporto *p* e *q* primi tra loro, deve essere a_2 multiplo di q.

c.v.d.

Esempio. Scomporre in fattori il polinomio $3x^3+13x^2+13x+3$.

Consideriamo i divisori del termine noto: $\pm 1; \pm 3$
Utilizzando il teorema del resto si ha:

$$R(1)=3(1)^3+13(1)^2+13(1)+3=3+13+13+3\neq 0$$

$$R(-1)=3(-1)^3+13(-1)^2+13(-1)+3=-3+13-13+3=0$$

Utilizzando la regola di Ruffini otteniamo:

	3	13	13	3
-1		-3	-10	-3
	3	10	3	0

possiamo quindi scrivere il polinomio come segue: $(x+1)(3x^2+10x+3)$.