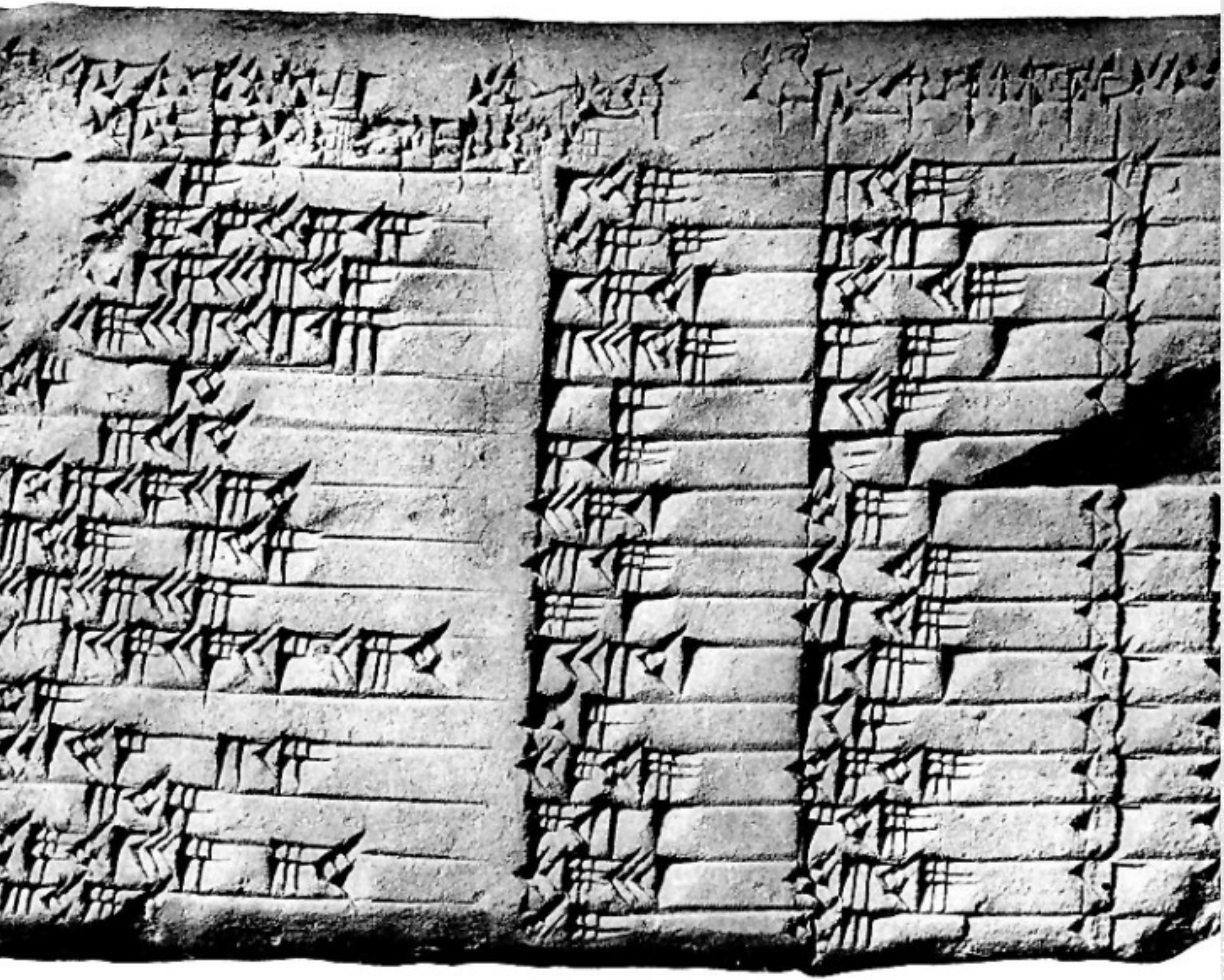
EVOLUZIONE DELL'ALGEBRA E RACCOLTE DI PROBLEMI

Prof.ri E. Modica e Pietro Li Causi

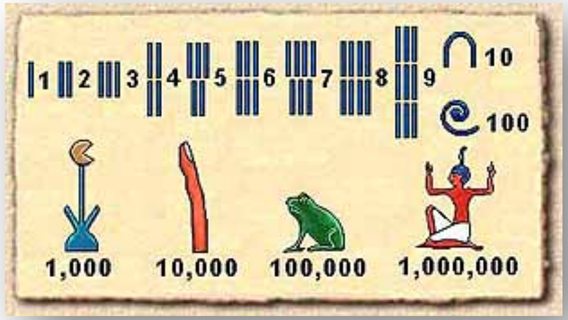
Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" – Palermo



SVILUPPO STORICO DELL'ALGEBRA

LENTO SVILUPPO DELL'ALGEBRA

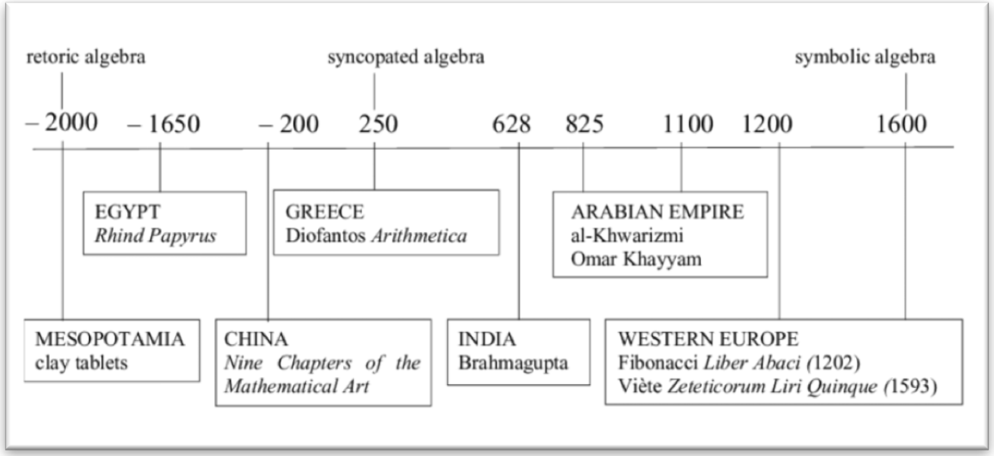
- L'algebra ha avuto uno sviluppo molto più lento rispetto alla geometria.
- Si può considerare come causa di questo ritardo, la **lenta costruzione di un linguaggio simbolico** che consentisse di esprimere agevolmente i concetti algebrici.



FASI DELL'ALGEBRA

Secondo lo studioso G. H. Nesselman, l'algebra ha attraversato le seguenti fasi:

- ***fase retorica*** (anteriore a *Diofanto di Alessandria*, 250 d.C.), nella quale si utilizzava esclusivamente il linguaggio naturale e quindi i testi di algebra si presentano nella stessa forma dei brani di prosa letteraria, cioè privi di simboli;
- ***fase sincopata*** (da *Diofanto* alla fine del XVI secolo), nella quale vengono introdotte delle abbreviazioni per le incognite, ma continuava a prevalere il linguaggio naturale per la descrizione dei calcoli;
- ***fase simbolica*** (introdotta da *Viète*), nella quale il linguaggio è ridotto a pochi segni essenziali e si utilizza il linguaggio simbolico per la risoluzione delle equazioni e per dimostrare regole di validità generale.

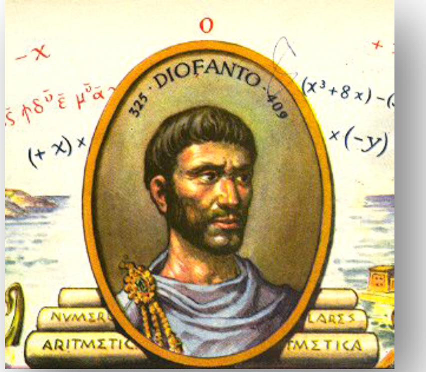


LA SIMBOLOGIA DI DIOFANTO

- Dalla suddetta classificazione delle fasi è quindi possibile dedurre che Babilonesi, Egiziani, Greci (600-200 a.C.) e Cinesi (300 a.C.-300 d.C.) si servivano solo del **linguaggio naturale** per i loro calcoli algebrici; mentre, come riportato dallo storico Kline, l'introduzione di una vera e propria simbologia per le incognite si deve a ***Diofanto*** (250 d.C.):

Simbolo odierno	**Simbolo introdotto da Diofanto**	**Descrizione**
x	ζ	Il numero del problema o arithme
x^2	Δ^{Υ}	"quadrato" o "potenza"
x^3	K^{Υ}	"cubo"
x^4	$\Delta^{\Upsilon}\Delta$	"quadrato-quadrato"
x^5	ΔK^{Υ}	"quadrato-cubo"
x^6	$K^{\Upsilon}K$	"cubo-cubo"
$1/x$	ζ^{χ}	

LA SIMBOLOGIA DI DIOFANTO



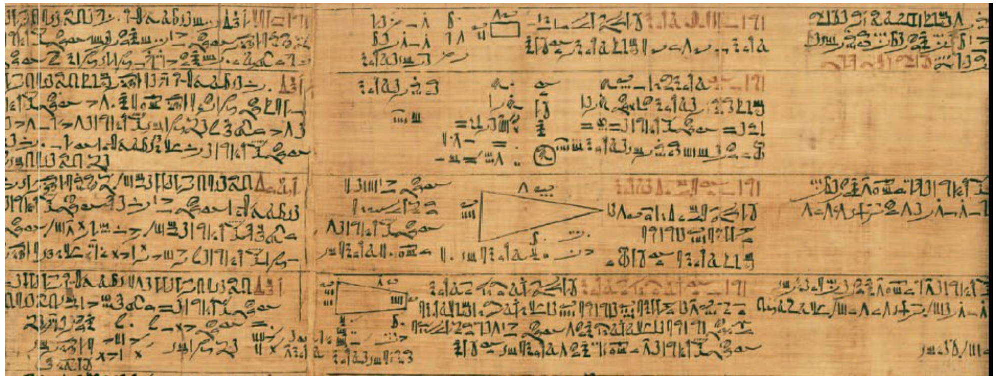
- Diofanto indicava l'addizione semplicemente accostando due simboli, mentre per la sottrazione utilizzava il simbolo /|\ e per l'uguaglianza il simbolo ι^{σ}, una abbreviazione del termine greco ’`ισοζ (=uguale).
- Per esempio, Diofanto avrebbe scritto l'equazione $x^3 - 2x^2 + 10x - 1 = 5$ utilizzando la seguente simbologia:

$$K^{\tilde{\upsilon}}\bar{\alpha}\varsigma\bar{\iota} \pitchfork \Delta^{\tilde{\upsilon}}\bar{\beta}\mathring{M}\bar{\alpha}\iota^{\sigma}\mathring{M}\bar{\epsilon}$$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

ANTICHE RACCOLTE DI PROBLEMI

PAPIRO RHIND



- È il più importante documento matematico dell'antico Egitto a noi noto.
- Prende il nome dall'antiquario scozzese che lo acquistò nel 1858.
- Fu compilato intorno al 1650 a.C. dallo scriba Ahmes.
- Oggi è conservato al British Museum di Londra.
- È una striscia lunga 540 cm e larga 30 cm.
- È scritto sui due lati:
  - il primo lato contiene tabelle numeriche;
  - il secondo lato contiene 87 problemi risolti.
- I problemi riguardano questioni pratiche di divisione di vettovaglie in parti uguali o proporzionali.

METODI DELLA FALSA POSIZIONE

- Durante il Medioevo, la risoluzione delle equazioni avveniva mediante l'uso dei **metodi della falsa posizione** (*regula falsorum*), di origine egiziana e cinese.
- Nel Papiro Rhind sono presenti diversi problemi la cui risoluzione (con il metodo della falsa posizione) corrisponde, in termini moderni, alla risoluzione di equazioni del tipo:

$$x + ax = b \qquad \text{e.} \qquad x + ax + bx = c$$

con a, b e c noti.

LA SEMPLICE FALSA POSIZIONE

- Il metodo della **semplice falsa posizione** consiste nell'attribuire all'incognita un valore particolare, effettuare i calcoli e arrivare al risultato corretto utilizzando il concetto di proporzionalità diretta.
- Come detto, si possono trovare le prime tracce di questo metodo nel papiro Rhind, in cui viene applicato per la risoluzione di problemi del tipo:

$$x + \frac{x}{n} = b$$

con $n, b \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $x \in E$, essendo E l'insieme dei numeri utilizzati dagli Egiziani, formato da tutti i numeri naturali non nulli, dalla frazione $\frac{2}{3}$ e dalle frazioni del tipo $\frac{1}{n}$.

LA SEMPLICE FALSA POSIZIONE: UN ESEMPIO

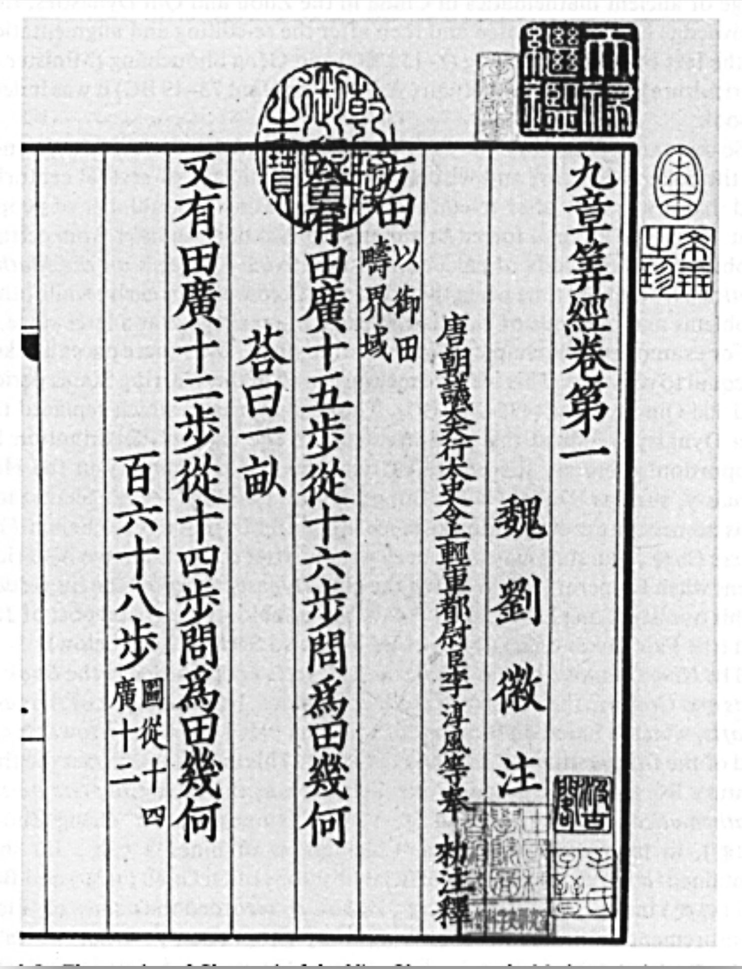
- Il problema 24 del papiro Rhind chiede di "*determinare una quantità che aumentata della sua settima parte sia uguale a 19*", che oggi tradurremmo nella seguente equazione:

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

- Gli Egiziani utilizzavano la seguente strategia risolutiva:
  - si sceglie il 7 come falsa posizione, quindi si ottiene che $7 + \frac{7}{7} = 8$;
  - si divide 19 per 8 e il risultato viene moltiplicato per 7, cioè $19 : 8 = x : 7$
  - il risultato sarà quindi $x = 19 \cdot \frac{7}{8}$.

NOVE CAPITOLI SULL'ARTE MATEMATICA
九章算术

- È il più importante testo cinese di matematica antica.
- Risale al II secolo a.C e non si hanno informazioni sull'autore.
- L'opera è suddivisa in nove parti e comprende 246 problemi.
- Tratta di questioni aritmetiche e geometriche.
- Nel testo non si ritrova alcuna notazione algebrica o dimostrazione.
- In esso sono presenti problemi di inseguimento.

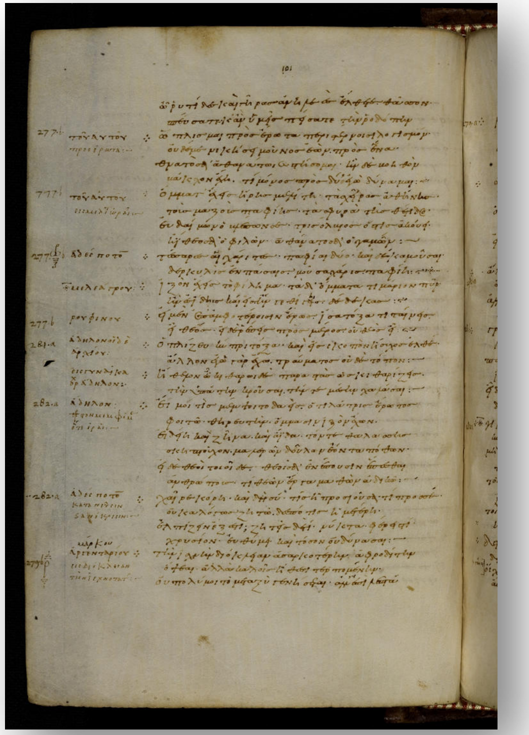

九章筭經卷第一
魏 劉徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步 圖從十四廣十二

I GIOCHI MATEMATICI

- Uno dei metodi più antichi di trasmissione della matematica è stato quello della **raccolta di problemi**, spesso raggruppati per le affinità che presentavano nell'uso dei metodi risolutivi.
- I giochi matematici, in quanto problemi, hanno sempre fatto **parte integrante dell'educazione matematica** e quindi tramandati alle generazioni future.
- Inizialmente, venivano mescolati nelle raccolte di problemi di natura pratica, ma in epoche successive sono state scritte delle vere **raccolte di giochi**.

ANTOLOGIA GRECA O PALATINA

- È una raccolta di 3700 epigrammi greci divisi, per argomento, in quindici libri.
- Si pensa che il più antico libro di raccolta di giochi matematici sia il **Libro XIV** dell'Antologia Palatina, intitolato ***Epigrammi aritmetici e indovinelli***.
- Tale libro contenente 150 epigrammi, di cui 45 sono problemi di aritmetica raccolti da Metrodoro, un grammatico vissuto tra la fine del V e l'inizio del VI secolo d.C.
- I problemi sono solo enunciati.
- Circa un quarto dei problemi sono equivalenti alla soluzione di equazioni di primo grado del tipo $ax + by + cz + dx + k = x$.



PROBLEMA TRATTO DALL'ANTOLOGIA PALATINA

Testo	Risoluzione
Socrate, I Pitagorici -Dimmi, rampollo eliconio di Muse, Pitagora illustre, quanti presso di te ce ne sono, che scendono a gara nel filosofico arengo, i successi migliori mietendo? -Ecco, Policrate: c'è una metà che si dedica a fondo a fascinosi problemi di calcolo; un quarto s'affanna sulla natura immortale; d'un settimo, tutta la cura sta nel silenzio totale, nel dialogo interno perenne; tre sono donne, ed eccelle su tutte le altre Teano. Tali i profeti di Muse Pierie di cui sono guida.	Policrate, un giovane prediletto dalle Muse, chiede a Pitagora quanti sono i Pitagorici. Il matematico greco risponde: ✓ ½ si dedicano ai problemi relativi al calcolo; ✓ ¼ studia la natura immortale; ✓ $1/7$ medita nel silenzio; ✓ 3 sono le donne, ci cui Teano è la migliore. Se si pone x uguale al numero totale dei Pitagorici, si ha l'equazione: $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x$ da cui si ricava che $x=28$.

ALCUINO DI YORK (735-804)

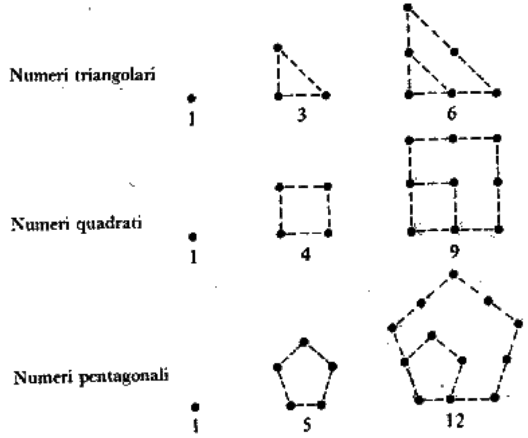
- Fu un filosofo e teologo anglosassone.
- Studiò presso la scuola di York, la più rinomata scuola europea del suo tempo, e ne divenne il direttore.
- Nel 781 fu chiamato dal re Carlomagno a dirigere la *Schola Palatina* e a organizzare l'istruzione di tutto il suo regno.
- Sosteneva l'ordinamento degli studi secondo le sette arti liberali:
  - grammatica, retorica e logica (***trivium***);
  - aritmetica, geometria, astronomia e musica (***quadrivium***).
- Suggerì al re di emanare alcuni decreti, dei quali il più importante, promulgato nel 789, ordinava di istituire presso i conventi e le cattedrali, scuole «in cui i fanciulli possano imparare a leggere», si prescriveva anche che venissero insegnati il computo e la grammatica.

Alcuino presenta i manoscritti del suo *scriptorium* a Carlo Magno (Victor Schnetz, 1830)

LA MATEMATICA AI TEMPI DI ALCUINO

- L'aritmetica del quadrivio faceva riferimento al testo greco ***Introduzione all'aritmetica*** di Nicomaco di Gerasa (II secolo d.C.), trattato su:
  - numeri primi, perfetti e figurati;
  - proporzioni e relative applicazioni alla musica.
- Non sono chiari i contenuti dell'insegnamento della geometria, ma era ben lontana dalla geometria degli *Elementi* di Euclide.
- La matematica non aveva un ruolo fondamentale, in quanto l'istruzione era finalizzata allo **studio dei testi sacri**.
- La matematica veniva utilizzata per la determinazione della data della *Pasqua*.

Un **numero perfetto** è un numero uguale alla somma di suoi divisori propri, compreso il numero 1 ed escluso il numero stesso.
Per esempio: 6=1+2+3



PROPOSITIONES AD ACUENDOS JUVENES

- Scritte all'incirca nell'800 d.C. rappresentano il più antico testo matematico medioevale oggi noto.
- Sono una collezione di **53 problemi**, molti dei quali appartengono al genere oggi denominato **matematica ricreativa**.
- Nelle *Propositiones* vi sono problemi la cui risoluzione richiede nozioni elementari di aritmetica e geometria, altri che richiedono solo attenzione e ragionamento.

TIPOLOGIE DI PROBLEMA DELLE PROPOSITIONES

1. Problemi di aritmetica elementare.
2. Problemi del mucchio.
3. Problemi di dare e avere.
4. Problemi dei «cento uccelli» e di «suddivisione di vettovaglie».
5. Problemi di inseguimento.
6. Problemi di testamento.
7. Problemi di acquisto e vendita allo stesso prezzo guadagnandoci.
8. Problemi di suddivisione di liquidi e ampolle.
9. Problemi di attraversamento.
10. Problemi di geometria.

PROBLEMI DEL MUCCHIO

- Erano già presenti nel papiro Rhind.
- Il loro nome deriva dal termine egiziano ***aha*** che significa “mucchio” e indica la quantità da individuare.
- In termini moderni equivalgono alla risoluzione di equazioni del tipo $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, etc., dove a, b, c sono numeri naturali noti o frazioni note.
- Venivano risolti con il metodo della falsa posizione.

PROBLEMA 2
DE VIRO AMBULANTE IN VIA

Quidam vir ambulans per viam vidit sibi alios homines obviantes, et dixit eis: volebam, ut fuissetis alii tantum, quanti estis; et medietas medietatis; et hujus numeri medietas; tunc una mecum C fuissetis. Dicat, qui velit, quanti fuerunt, qui in primis ab illo visi sunt?

Solutio
Qui imprimis ab illo visi sunt, fuerunt XXXVI. Alii tantum LXXII. Medietas medietatis XVIII. Et hujus numeri medietas sunt VIIII. Dic ergo sic: LXXII et XVIII fiunt XC. Adde VIIII fiunt XCVIIII. Adde loquentem, et habebis C.

Un uomo, mentre camminava in strada, vide degli altri viandanti che gli andavano incontro e disse loro: ''Volevo che voi foste tanti quanti siete, più la metà della metà, più di nuovo metà della metà, allora, me compreso, sareste 100''.
Dica, chi vuole, quanti erano gli uomini visti inizialmente da quel tale?

Soluzione.
Gli uomini che quel tale vide inizialmente, erano 36, il cui doppio è 72. La metà della metà di 72 è 18, e la metà di 18 è 9. In conclusione: 72 e 18 fanno 90. Aggiungi 9 e fa 99. Aggiungi il tale che parla e avrai 100.

PROBLEMA 2
RISOLUZIONE CON I SIMBOLI MODERNI

Un uomo, mentre camminava in strada, vide degli altri viandanti che gli andavano incontro e disse loro: ”Volevo che voi foste tanti quanti siete, più la metà della metà, più di nuovo metà della metà, allora, me compreso, sareste 100”. Dica, chi vuole, quanti erano gli uomini visti inizialmente da quel tale?

Se si indica con x il numero degli uomini incontrati dall'uomo, si ottiene:

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

da cui:

$$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 99$$

Se si pone $x = 4$ si ottiene 11 anziché 99. Quindi dalla proporzione $11: 99 = 4: x$ si ottiene:

$$x = \frac{99 \cdot 4}{11} = 36$$

PROBLEMA 3
PROPOSITIO DE DUOBUS PROFICISCENTIBUS VISIS CICONIIS

Duo homines ambulantes per viam, videntesque ciconias, dixerunt inter se: Quot sunt? Qui conferentes numerum dixerunt: Si essent aliae tantae et ter tantae et medietas tertii, adjectis duobus C essent. Dicat, qui potest, quantae fuerunt, quae imprimis ab illis visae sunt?

Solutio de ciconiis
XXVIII et XVIII, et tertio sic; fiunt LXXXIIII. Et medietas tertii fiunt XIIII. Sunt in totum XCVIII. Adjectis duobus, C apparent.

Due uomini stavano camminando in strada e notarono alcune cicogne. Si chiesero l'un l'altro: "Quante ce ne sono?" Discutendo sul numero, dissero: "Se le cicogne fossero altrettante e tre volte tante e se se ne aggiungesse la metà di un terzo e se se ne aggiungessero due, sarebbero 100." Dica, chi può, quante cicogne videro inizialmente i due uomini?

Soluzione
28 e 28 e ancora 28 fa 84 e metà del terzo di 84 è 14. Le cicogne sono in tutto 98. Se si somma 2 in totale sono 100.

PROBLEMA 3
RISOLUZIONE CON I SIMBOLI MODERNI

Due uomini stavano camminando in strada e notarono alcune cicogne. Si chiesero l'un l'altro: "Quante ce ne sono?" Discutendo sul numero, dissero: "Se le cicogne fossero altrettante e tre volte tante e se se ne aggiungesse la metà di un terzo e se se ne aggiungessero due, sarebbero 100."
Dica, chi può, quante cicogne videro inizialmente i due uomini?

Se si indica con x il numero delle cicogne, si ottiene:

$$x + x + x + \frac{x}{2} + 2 = 100$$

da cui:

$$3x + \frac{x}{2} = 99$$

Se si pone $x = 2$ si ottiene 7 anziché 98. Quindi dalla proporzione $7 : 98 = 2 : x$ si ottiene:

$$x = \frac{98 \cdot 2}{7} = 28$$

PROBLEMA 4
PROPOSITIO DE HOMINE ET EQUIS IN CAMPO PASCENTIBUS

Quidam homo vidit equos pascentes in campo, optavit dicens: utinam essetis mei, et essetis alii tantum, et medietas medietatis; certe gloriarer super equos C. Discernat, qui vult, quot equos imprimis vidit ille homo pascentes?

Solutio de equis
XL equi erant, qui pascebant. Alii tantum fiunt LXXX. Medietas medietatis hujus, id est, XX si addatur, fiunt C.

PROBLEMA 40
PROPOSITIO DE HOMINE ET OVIBUS IN MONTE PASCENTIBUS

Quidam homo vdit de monte oves pascentes, et dixit, utinam haberem tantum, et aliud tantum et medietatem de medietate, et de hac medietate aliam medietatem, atque ego centesimus una cum ipsis ingrederer meam domum. Solvat, qui potest, quot oves vidit ibidem pascentes?

Solutio
In hoc ergo, quod dixit; haberem tantum; XXXVI oves primum ab illo visae sunt. Et aliud tantum fiunt LXXII, atque medietas de hac videlicet medietate, hoc est, de XXXVI, fiunt X et VIII. Rursusque de hac secunda scilicet medietate assumpta medietas, id est, de XVIII fiunt VIIII. Junge ergo XXXVI et XXXVI, fiunt LXXII. Adde cum ipsis XVIII, fiunt XC. Adde vero VIIII cum XC, fiunt XCVIIII. Ipse vero homo cum ipsis additus erit centesimus.

PROBLEMA 44
PROPOSITIO DE SALUTATIONE PUERI AD PATREM

Quidam puer salutavit patrem; ave, inquit, pater! Cui pater: valeas fili! vivas, quantum vixisti, quos annos geminatos triplicatos; et sume unum de annis meis; et habebis annos C. Dicat, qui potest, quot annorum tunc tempore puer erat?

Solutio
Erat enim puer annorum XVI, et mensium VI, qui geminati cum mensibus fiunt anni XXXIII, qui triplicati fiunt XCVIIII. Additio uno patris anno C apparent.

PROBLEMA 45
PROPOSITIO DE COLUMBA

Columba sedens in arbore vidit alias volantes et dixit eis: Ttinam fuissetis aliae tantum et tertiae tantum. Tunc una mecum fuissetis C. Dicat, qui potest, quot columbae erant in primis volantes?

Solutio.
Triginta III erant columbae, quas prius conspexit volantes. Item aliae tantae fiunt LXVI. Et tertiae tantum, fiunt XCVIIII. Adde sedentem, et erunt C.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- Carl B. Boyer, ***Storia della matematica***, Mondadori, 1990.
- Raffaella Franci (a cura di), ***Alcuino di York, Giochi matematici alla corte di Carlomagno***. *Problemi per rendere acuta la mente dei giovani*, ETS, Pisa, 2005.
- Raffaella Franci, Laura Toti Rigatelli, ***Storia della teoria delle equazioni algebriche***, Mursia, 1979.

- http://utenti.quipo.it/base5/alcuino/alcuintegra.htm
- https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/info/CapitoloPrimo/Alcuino/Alcuino.htm
- http://progettomatematica.dm.unibo.it/StoriaEq/egizi.html
- https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_di_falsa_posizione_in_Fibonacci