L'insieme dei numeri complessi

L'insieme dei numeri reali non è sufficiente per permettere la risoluzione di equazioni di secondo grado del tipo

$$x^2 = -1$$

Infatti, abbiamo sempre detto che non esistono numeri il cui quadrato è negativo e ci siamo sempre fermati di fronte ad una tale equazione definendola impossibile in $\mathbb{R}$. Per renderla quindi risolubile, si introduce il nuovo simbolo *i*, il cui quadrato è proprio uguale a -1, cioè:

$$i^2 = -1$$

Questo nuovo ente prende il nome di **unità immaginaria** e non è associata alla classica operazione del *contare*, ma è solamente un simbolo che ci permette di estendere i numeri reali, e che è soggetto alla legge:

$$i^2 = -1$$

ovvero

$$i = \sqrt{-1}$$

Definizione: Si definisce ***numero complesso*** ogni scrittura del tipo

$$a + ib$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Il numero *a* prende il nome di ***parte reale***, mentre il numero *b* prende il nome di ***coefficiente della parte immaginaria***.

L'insieme dei numeri complessi è quindi dato da:

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

SOMMA ALGEBRICA

Definizione: Dati due numeri complessi $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, la loro ***somma algebrica*** è data da:

$$z_1 \pm z_2 = (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

Esempio: Sommare e sottrarre i numeri complessi $z_1 = \frac{1}{2} + 2i$ e $z_2 = \frac{1}{2} - 3i$.

La somma è data da:

$$z_1 + z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + i(2 - 3) = 1 - i$$

La differenza è data da:

$$z_1 - z_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i(2 + 3) = 5i$$

MOLTIPLICAZIONE

Definizione: Dati due numeri complessi $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, la loro ***moltiplicazione*** è data da:

$$z_1\, z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd$$

ovvero:

$$z_1\, z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Esempio: Moltiplicare i numeri complessi $z_1 = \frac{1}{2} + 2i$ e $z_2 = \frac{1}{2} - 3i$.

Il prodotto è dato da:

$$z_1 z_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}i + i - 6i^2 = \left(\frac{1}{4} + 6\right) + \left(1 - \frac{3}{2}\right)i = \frac{25}{4} - \frac{1}{2}i$$

CONIUGIO

Definizione: Si definisce ***coniugato*** del numero complesso $a + ib$ il numero complesso $a - ib$.

Si osservi che un numero complesso e il suo coniugato hanno la stessa parte reale e coefficienti della parte immaginaria opposti.

Esempio: Il numero complesso coniugato di $7 - 5i$ è il numero complesso $7 + 5i$.

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO E NUMERI COMPLESSI

Per risolvere l’equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si utilizza la formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

che coinvolge l’estrazione della radica quadrata della quantità $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si possono quindi presentare, in merito alle radici, i seguenti casi:
- $\Delta > 0$ due radici reali e distinte;
- $\Delta = 0$ due radici reali coincidenti;
- $\Delta < 0$ due radici complesse coniugate.

Esempio: Risolvere l’equazione $x^2 - 2x + 10 = 0$

Si ha:

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 10 = -9$$

e quindi:

$$x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{-9} = 1 \mp 3i$$

cioè

$$x_1 = 1 - 3i, \;\; x_2 = 1 + 3i$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi complesse coniugate.

Esercizi

1. Effettuare le seguenti somme algebriche tra numeri complessi:

$$(-5 + 2i) + (3 + i) \qquad\qquad \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}i\right) - \left(\frac{1}{2} - 2i\right)$$

2. Moltiplicare i seguenti numeri complessi:

$$(2 - i)(2 + i) \qquad\qquad \left(\sqrt{2} + 3i\right)\left(\sqrt{8} - 2i\right)$$

3. Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado nell'insieme dei numeri complessi:

$$x^2 + 5 = 0 \qquad\qquad x^2 + x + 1 = 0$$
$$2x^2 + 1 = 0 \qquad\qquad x^2 - 2x + 26 = 0$$
$$7x^2 + 3 = 0 \qquad\qquad x^2 + 2\sqrt{5}x + 1 = 0$$