Sistemi di numerazione

LICEO SCIENTIFICO STATALE "S. CANNIZZARO" - PALERMO

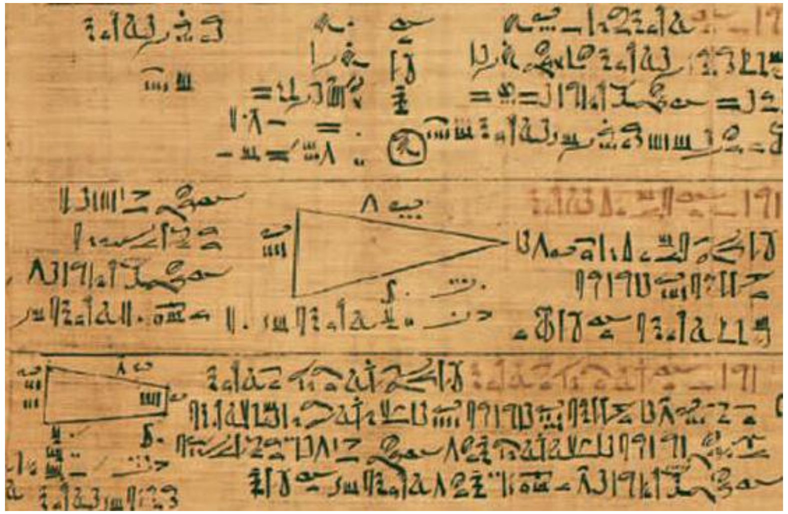
PROF.RE E. MODICA

Preistoria

- I primi esempi di utilizzo di sistemi di numerazione risalgono al neolitico, ovvero a circa 50.000 anni fa.
- In epoca preistorica, le più utilizzate furono le basi 2, 5, 10, 20, 12, e 60.
- Mentre le basi 2, 5 10 e 20 sono suggerite dalla fisiologia umana, 12 e 60 sembrano suggerite da scopi utilitaristici: 12 è divisibile per 1, 2, 3, 4, 6 e 12 mentre 60 per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30 e 60.
- Da notare che il 7 non compare mai nelle basi di numerazione e, in effetti, ebbe significati particolari, anche religiosi, presso i popoli antichi.

Storia

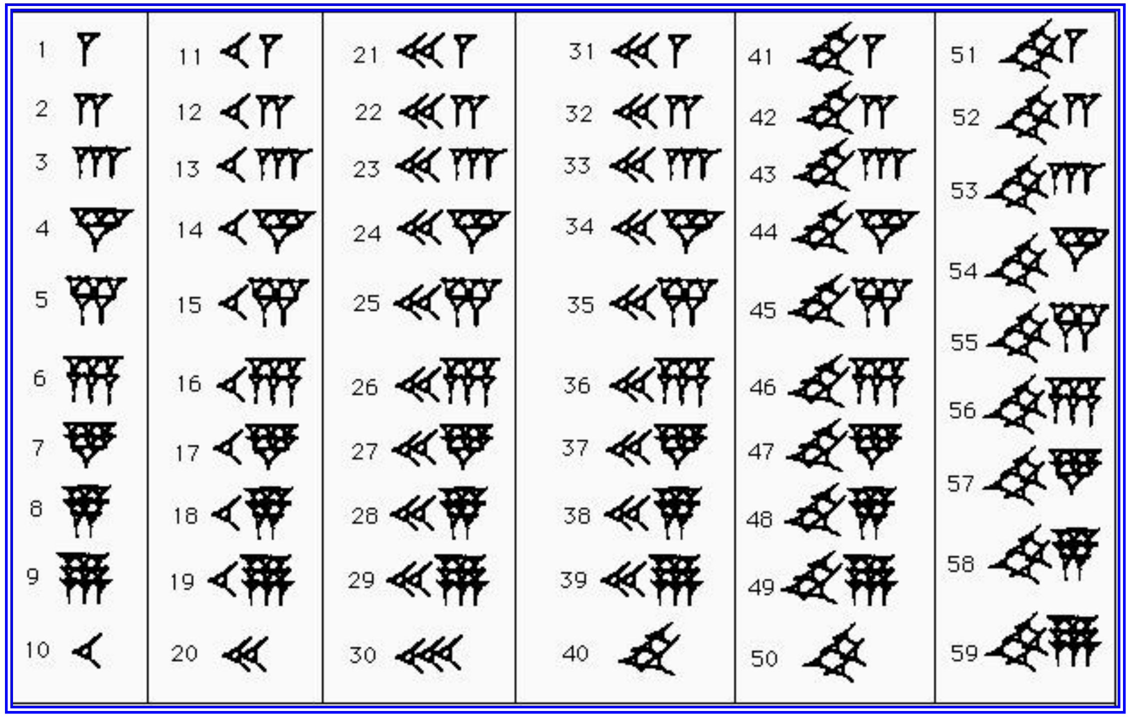
- Tra le prime testimonianze certe dell'utilizzo di concetti numerici avanzati vi sono le tavole numeriche babilonesi, elenchi di numeri utilizzati per **calcoli astronomici** e di agrimensura, risalenti al X secolo a.C.
- Tuttavia nelle culture dell'antica Mesopotamia esistevano **tabelle per le addizioni e le sottrazioni** già durante il regno di Sargon I, intorno al 2350 a.C.
- Il documento più significativo dell'antico Egitto è il papiro di Ahmes, dal nome dello scriba che lo compose nel 1650 a.C., che si pensa risalga al 2650 a.C.



I numeri in Mesopotamia – 1

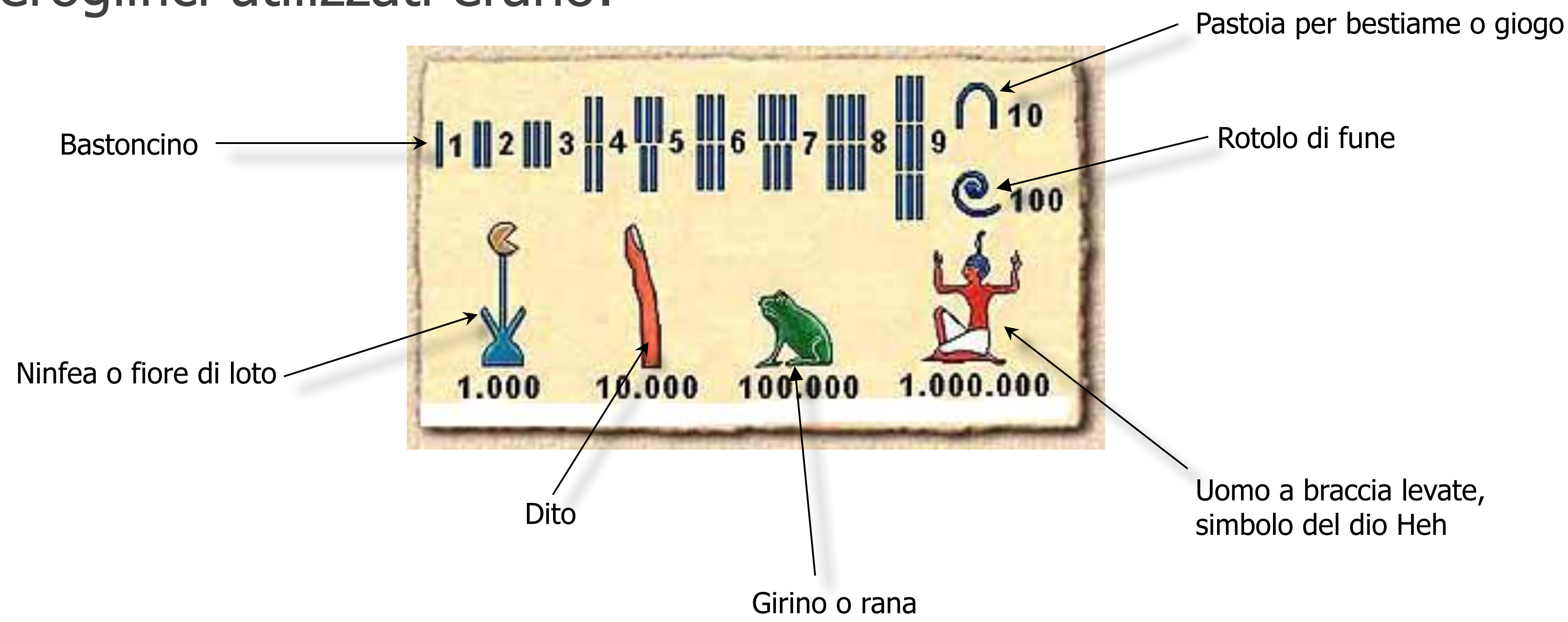
- Appartengono alla civiltà dei **Sumeri** varie tavolette che contengono i più antichi segni numerali usati dall'uomo e risalgono al 3500–3000 a.C.
- I simboli fondamentali usati nella numerazione sumera corrispondono ai numeri 1, 10, 60, 600, 3600, 36000.

I numeri in Mesopotamia – 2



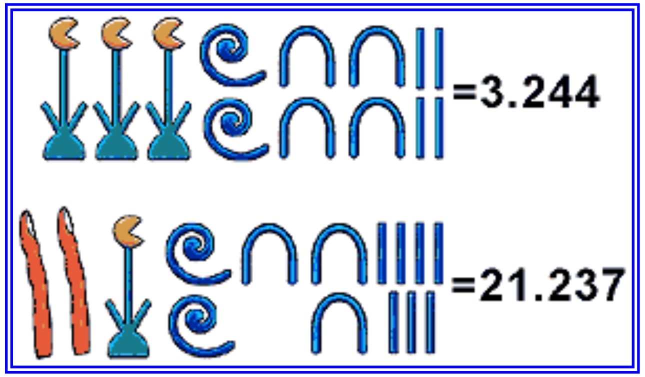
I numeri nell’antico Egitto – 1

- La matematica egizia utilizzava la base 10, ed impiegava simboli diversi per rappresentare le diverse potenze del 10, da 1 a 10^6
- I geroglifici utilizzati erano:



I numeri nell'antico Egitto – 2

- I numeri venivano formati raggruppando i simboli, generalmente posti in ordine dal più piccolo al più grande, da sinistra a destra.
- Il sistema di numerazione non è, tuttavia, posizionale.
- L'ordine è una sorta di convenzione linguistica, senza significato matematico.



I numeri nell'antica Grecia – 1

Nella civiltà greca classica sono noti due principali sistemi di numerazione.

- Il primo, più antico, è noto come ***attico*** ed è per molti aspetti simile a quello in uso presso i Romani; utilizzava infatti accanto ai simboli fondamentali per l'1 e le potenze di 10 fino a 10000, un simbolo speciale per il 5, che combinato con i precedenti, dava altri simboli anche per 50, 500, 5000, 50000.
- Compaiono testimonianze di questo sistema dal V al I secolo a.C. ma, a partire dal III secolo, si diffonde anche il sistema detto ***ionico*** o ***alfabetico***.
- Il sistema ***ionico*** si serve di ventisette simboli alfabetici (alcuni dei quali arcaici e non più usati nella Grecia classica) per indicare le unità da 1 a 9, le decine da 10 a 90, le centinaia da 100 a 900

I numeri nell'antica Grecia – 2

1 = Α	10 = Ι	100 = Ρ	1000 = ,Α
2 = Β	20 = Κ	200 = Σ	2000 = ,Β
3 = Γ	30 = Λ	300 = Τ	3000 = ,Γ
4 = Δ	40 = Μ	400 = Υ	4000 = ,Δ
5 = Ε	50 = Ν	500 = Φ	5000 = ,Ε
6 = ζ	60 = Ξ	600 = Χ	6000 = ,ζ
7 = Ζ	70 = Ο	700 = Ψ	7000 = ,Ζ
8 = Η	80 = Π	800 = Ω	8000 = ,Η
9 = Θ	90 = ϙ	900 = ϡ	9000 = ,Θ

Per esempio:

Μ,ζψοζ · ,ζψοζ

= 67.766.776

I numeri nell'antica Roma – 1

Nel sistema di numerazione romano, con base decimale, ci si serviva, come è noto, anche di simboli speciali per indicare 5, 50, 500

Alcune antiche epigrafi inducono a ritenere che i segni usati fossero inizialmente segni speciali, forse di origine etrusca, che solo successivamente furono identificati con le lettere I, V, X, L, C, D, M

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

I numeri nell'antica Roma – 2

- La scrittura dei numeri avveniva combinando additivamente i segni.
- Per agevolare scrittura e lettura si diffuse più tardi un sistema sottrattivo (che ha traccia anche nelle forme verbali come ad esempio "undeviginti", stessa cosa di "decem et novem").
- Un simbolo posto alla sinistra di un simbolo di quantità maggiore viene sottratto, così IX e VIIII indicano entrambi il numero 9.
- Ancora in epoca tarda, un segno che prese l'aspetto di una linea orizzontale posta sopra le lettere serviva per indicarne la moltiplicazione per 1000

Dall'India… il sistema decimale – 1

- I primi testi che ci sono giunti risalgono al V secolo d.C.
- Non è ancora chiaro dove e quando si sia sviluppato il sistema di notazione decimale posizionale che, in seguito, attraverso gli **Arabi**, si è diffuso in Europa.
- L'idea di usare un numero limitato di simboli a cui dare valore diverso a seconda della posizione occupata può essere stata, secondo alcuni studiosi, sviluppata dagli **Indiani** per conoscenza diretta — o ereditata dai Greci — del sistema sessagesimale babilonese.
- Gli Indiani avrebbero allora iniziato ad utilizzare solamente i primi 9 simboli del loro sistema decimale in caratteri ***Brahmi***, in uso dal III secolo a.C.

Dall’India… il sistema decimale – 2

I simboli assumono forme diverse a seconda delle zone e dei periodi, ma sono comunque quelli che gli Arabi più tardi utilizzarono e che, dalla forma araba, sono passati in Europa, fino alla forma definitiva resa uniforme dalla stampa nel XV secolo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
१	२	३	४	५	६	७	८	९	०

Sistemi di numerazione posizionali

Sistemi di numerazione posizionali:

La base del sistema di numerazione
Le cifre del sistema di numerazione

Il numero è scritto specificando le cifre in ordine e il suo valore dipende dalla posizione relativa delle cifre

Esempio: Il sistema decimale (Base 10)

Cifre : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$5641 = 5 \cdot \boxed{10^3} + 6 \cdot \boxed{10^2} + 4 \cdot \boxed{10^1} + 1 \cdot \boxed{10^0}$$

Posizione: 3 2 1 0

Il sistema binario

La base 2 è la più piccola per un sistema di numerazione

Cifre: 0 1 – bit (binary digit)

Esempi:

Forma polinomiale

$$(101101)_2 = \boxed{1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0} = 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = (45)_{10}$$

$$(0,0101)_2 = 0\cdot2^{-1} + 1\cdot2^{-2} + 0\cdot2^{-3} + 1\cdot2^{-4} = 0 + 0,25 + 0 + 0,0625 = (0,3125)_{10}$$

$$(11,101)_2 = 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 + 1\cdot2^{-1} + 0\cdot2^{-2} + 1\cdot2^{-3} = 2 + 1 + 0,5 + 0 + 0,125 = (3,625)_{10}$$

Da decimale a binario
Numeri interi

Si divide ripetutamente il numero **intero** decimale per 2 fino ad ottenere un quoziente nullo; le cifre del numero binario sono i resti delle divisioni; la cifra più significativa è l'ultimo resto

Esempio: convertire in binario $(43)_{10}$

resti

$$\begin{array}{rcl} 43 : 2 = 21 & + & 1 \\ 21 : 2 = 10 & + & 1 \\ 10 : 2 = 5 & + & 0 \\ 5 : 2 = 2 & + & 1 \\ 2 : 2 = 1 & + & 0 \\ 1 : 2 = 0 & + & 1 \end{array}$$

bit più significativo

$$(43)_{10} = (101011)_2$$

Da decimale a binario
Numeri razionali

Si moltiplica ripetutamente il numero **frazionario** decimale per 2, fino ad ottenere una parte decimale nulla o, dato che la condizione potrebbe non verificarsi mai, per un numero prefissato di volte; le cifre del numero binario sono le parti intere dei prodotti successivi; la cifra più significativa è il risultato della prima moltiplicazione

Esempio: convertire in binario $(0{,}21875)_{10}$ e $(0{,}45)_{10}$

$$
\begin{aligned}
0{,}21875 \times 2 &= 0{,}4375\\
0{,}4375 \times 2 &= 0{,}875\\
0{,}875 \times 2 &= 1{,}75\\
0{,}75 \times 2 &= 1{,}5\\
0{,}5 \times 2 &= 1{,}0
\end{aligned}
$$

$(0{,}21875)_{10} = (0{,}00111)_2$

$$
\begin{aligned}
0{,}45 \times 2 &= 0{,}9\\
0{,}90 \times 2 &= 1{,}8\\
0{,}80 \times 2 &= 1{,}6\\
0{,}60 \times 2 &= 1{,}2\\
0{,}20 \times 2 &= 0{,}4 \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$(0{,}45)_{10} \approx (0{,}01110)_2$

Dal bit al byte

Un **byte** è un insieme di 8 bit (un numero binario a 8 cifre)

$$b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$$

Con un byte si rappresentano i numeri interi fra 0 e $2^8-1 = 255$

00000000
00000001
00000010
00000011
…………….
11111110
11111111

$2^8 = 256$ valori distinti

È l'elemento base con cui si rappresentano i dati nei calcolatori

Si utilizzano sempre dimensioni multiple (di potenze del 2) del byte: 2 byte (16 bit), 4 byte (32 bit), 8 byte (64 bit)…

Dal byte al kilobyte

Potenze del 2

$2^4 = 16$
$2^8 = 256$
$2^{16} = 65536$

$2^{10} = 1024$ (K=Kilo)
$2^{20} = 1048576$ (M=Mega)
$2^{30} = 1073741824$ (G=Giga)

Cosa sono KB (Kilobyte), MB (Megabyte), GB (Gigabyte)?

1 KB = 2^{10} byte = 1024 byte
1 MB = 2^{20} byte = 1048576 byte
1 GB = 2^{30} byte = 1073741824 byte
1 TB = 2^{40} byte = 1099511627776 byte (Terabyte)