Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro"

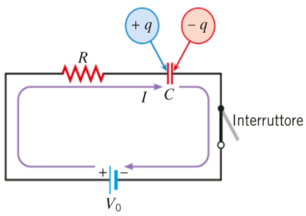
Integrali ed equazioni differenziali in Fisica

Prof. E. Modica
erasmo@galois.it

Indice

1 La fase di carica in un circuito RC

Si consideri un circuito RC all'istante t immediatamente successivo alla chiusura avvenuta all'istante $t = 0$ s. Sulle armature del condensatore di capacità C è presente una carica $Q = Q(t)$ e nel circuito scorre una corrente $I = I(t)$.



Muovendosi lungo il circuito a partire dall'interruttore e andando in senso orario, vi sono delle variazioni di tensione, in particolare:

- il generatore fornisce una tensione V_0;
- si ha una caduta di tensione $RI(t)$ dovuta alla resistenza;
- si ha una caduta di potenziale $\frac{Q(t)}{C}$ dovuta al condensatore di capacità C.

Applicando il teorema della maglia si ha:

$$V_0 - \frac{Q(t)}{C} - RI(t) = 0 \tag{1.1}$$

dove le due grandezze $I(t)$ e $Q(t)$ sono legate dalla relazione:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \tag{1.2}$$

Inserendo la relazione (1.2) nella relazione (1.1) si ottiene:

$$V_0 - \frac{Q(t)}{C} - R\frac{dQ(t)}{dt} = 0$$

che rappresenta un'equazione differenziale lineare a variabili separabili in cui l'incognita è la funzione $Q(t)$. Quindi si ha:

$$CV_0 - Q(t) = RC\frac{dQ(t)}{dt}$$

da cui segue che:

$$\frac{dQ(t)}{CV_0 - Q(t)} = \frac{dt}{RC} \tag{1.3}$$

Integrando ambo i membri della (1.3) otteniamo:

$$\int \frac{dQ(t)}{CV_0 - Q(t)} = \int \frac{dt}{RC}$$

ossia:

$$\int \frac{-dQ(t)}{CV_0 - Q(t)} = -\int \frac{dt}{RC}$$

da cui:

$$\ln(CV_0 - Q(t)) = -\frac{t}{RC} + k$$

cioè:

$$CV_0 - Q(t) = e^{-\frac{t}{RC}+k}$$

L'espressione della carica in funzione del tempo sarà quindi data da:

$$Q(t) = CV_0 - e^{-\frac{t}{RC}+k} \tag{1.4}$$

Poiché all'istante $t = 0$ s il condensatore è **scarico**, si ha che $Q(0) = 0$ e, sostituendo nella (1.4) si ottiene:

$$Q(0) = CV_0 - e^{0+k} = CV_0 - e^k = 0$$

quindi:

$$e^k = CV_0$$

In definitiva, l'espressione (1.4) diventa:

$$Q(t) = CV_0(1 - e^{\frac{-t}{RC}}) \tag{1.5}$$

Essendo $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$, si avrà:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{CV_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

da cui segue che:

$$I(t) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

2 La fase di scarica in un circuito RC

Se, dato un circuito RC, si apre il circuito, il potenziale V_0 dovuto alla batteria è pari a zero. Sulle armature del condensatore di capacità C è presente una carica massima Q_0.
Eliminando V_0 dall'equazione:

$$V_0 - \frac{Q(t)}{C} - RI(t) = 0$$

si ottiene l'equazione differenziale lineare a variabili separabili:

$$\frac{Q(t)}{C} + RI(t) = 0 \tag{2.1}$$

da cui:

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{dt}{RC} \tag{2.2}$$

Integrando ambo i membri della (2.2) otteniamo:

$$\int \frac{dQ(t)}{Q(t)} = \int -\frac{dt}{RC}$$

da cui:

$$\ln Q(t) = -\frac{t}{RC} + k$$

cioè:

$$Q(t) = e^{-\frac{t}{RC}+k} \tag{2.3}$$

All'istante $t = 0$ s la carica presente sulle armature è pari a Q_0, per cui si avrà:

$$Q(0) = e^{0+k} = e^k = Q_0$$

quindi:

$$e^k = Q_0$$

In definitiva, l'espressione (2.3) diventa:

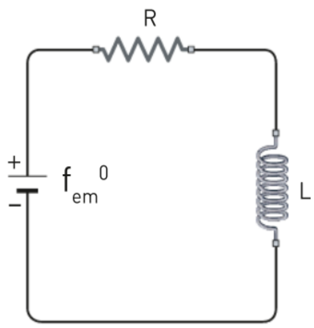
$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{2.4}$$

Essendo $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$, si avrà:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

3 La fase di chiusura in un circuito RL

Si consideri un circuito RL all'istante t immediatamente successivo alla chiusura avvenuta all'istante $t = 0$ s.



Muovendosi lungo il circuito in senso orario, vi sono delle variazioni di tensione, in particolare:

- il generatore fornisce una tensione f_0;
- si ha una caduta di tensione $RI(t)$ dovuta alla resistenza;
- si ha una caduta di tensione $L\frac{dI(t)}{dt}$ dovuta alla presenza dell'induttanza L.

Applicando il teorema della maglia si ha:

$$f_0 - L\frac{dI(t)}{dt} - RI(t) = 0 \tag{3.1}$$

Tale equazione è un'equazione differenziale lineare a variabili separabili in cui l'incognita è la funzione $I(t)$. Quindi si ha:

$$f_0 - RI(t) = L\frac{dI(t)}{dt}$$

da cui segue che:

$$\frac{dI(t)}{f_0 - RI(t)} = \frac{dt}{L} \tag{3.2}$$

Integrando ambo i membri della (3.2) otteniamo:

$$\int \frac{dI(t)}{f_0 - RI(t)} = \int \frac{dt}{L}$$

ossia:

$$-\frac{1}{R}\int \frac{-RdI(t)}{f_0 - RI(t)} = \int \frac{dt}{L}$$

da cui:

$$-\frac{1}{R}\ln(f_0 - RI(t)) = -\frac{t}{L} + h$$

cioè:

$$\ln(f_0 - RI(t)) = -\frac{R}{L}t + k$$

essendo $k = Rh$. Dalla precedente relazione, ponendo $\tau = \frac{L}{R}$, segue che:

$$f_0 - RI(t) = e^{-\frac{t}{\tau}+k}$$

ossia:

$$I(t) = \frac{f_0}{R} - \frac{e^{-\frac{t}{\tau}+k}}{R} \tag{3.3}$$

Poiché all'istante $t = 0$ s si ha che $I(0) = 0$, sostituendo nella (3.3) si ottiene:

$$I(0) = \frac{f_0}{R} - \frac{e^k}{R} = 0$$

da cui segue che:

$$e^k = f_0$$

In definitiva, l'espressione (3.4) diventa:

$$I(t) = \frac{f_0}{R} - \frac{f_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{f_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{3.4}$$

4 La fase di apertura in un circuito RL

Se, dato un circuito RL, si apre il circuito, il potenziale f_0 dovuto alla batteria è pari a zero. Nel circuito circola una corrente massima I_0.
Eliminando f_0 dall'equazione:

$$f_0 - L\frac{dI(t)}{dt} - RI(t) = 0$$

si ottiene la seguente equazione differenziale lineare a variabili separabili:

$$-L\frac{dI(t)}{dt} - RI(t) = 0$$

ossia:

$$-\frac{dI(t)}{RI(t)} = \frac{dt}{L} \tag{4.1}$$

Integrando ambo i membri della (4.1) otteniamo:

$$-\int \frac{dI(t)}{RI(t)} = \int \frac{dt}{L}$$

cioè:

$$\ln I(t) = -\frac{R}{L}t + k$$

da cui:

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t+k} \tag{4.2}$$

Poiché all'istante $t = 0$ s si ha che $I(0) = I_0$, sostituendo nella (4.2) si ottiene:

$$I(0) = e^k = I_0$$

In definitiva, l'espressione (4.2) diventa:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

5 Energia immagazzinata in un solenoide

Dalla legge di Faraday-Neumann discende che in un solenoide percorso da una corrente i si origina una f.e.m. indotta $f_i = -L\frac{dI}{dt}$. Per la legge di Lenz, la f.e.m. indotta si oppone alla f.e.m. del generatore in modo da opporsi alla variazione di corrente. Il generatore dovrà quindi compiere un lavoro W per spingere le cariche attraverso il solenoide contro la suddetta f.e.m. indotta. Se si indica con dW il lavoro compiuto dal generatore per spingere una carica dQ nel solenoide si ha:

$$dW = -f_i \cdot dQ = -dQ \cdot \left(-L\frac{dI}{dt}\right) = L\frac{dQ \cdot dI}{dt} \tag{5.1}$$

Essendo $I = \frac{dQ}{dt}$, la (5.1) diventa:

$$dW = LI \cdot dI$$

Per determinare il lavoro totale compiuto dal generatore mentre la corrente passa dal valore zero al valore I basta calcolare il seguente integrale definito:

$$W = \int_0^I LI \cdot dI = L\int_0^I I \cdot dI = L\left[\frac{1}{2}I^2\right]_0^I = \frac{1}{2}LI^2$$

Riferimenti bibliografici

[1] Ugo Amaldi, 2015. *L'Amaldi per i licei scientifici.blu, Volume 3*, Zanichelli.

[2] J. D. Cutnell, K. W. Johnson, D. Young, S. Stadler, 2015. *I problemi della fisica, Volume 3*, Zanichelli.

[3] Claudio Romeni, 2012. *Fisica e realtà, Volume 3*, Zanichelli.

[4] Leonardo Sasso, 2015. *Nuova Matematica a colori, Volume 5*, Petrini.

[5] Serwey, Jewett, 2015. *Fisica per Scienze e Ingegneria, Volume 2*, Edises.

[6] Tipler, Mosca, 2010. *Corso di Fisica, Volume 2 - Elettricità Magnetismo Ottica*, Zanichelli.