Principio d'induzione matematica

Erasmo Modica

15 novembre 2024

Introduzione

Il principio di induzione matematica è uno strumento fondamentale per dimostrare che una proprietà vale per tutti i numeri naturali. Questo metodo di dimostrazione è stato formalizzato nel XIX secolo, ma le sue radici risalgono a tempi molto più antichi.
Già nel IV secolo a.C., il matematico greco **Euclide** utilizzava ragionamenti simili all'induzione per dimostrare proprietà sui numeri. Tuttavia, la prima formulazione rigorosa del principio di induzione matematica è attribuita al matematico italiano **Giuseppe Peano** nel 1889. Peano incluse il principio tra i suoi famosi assiomi, che stabiliscono le basi dell'aritmetica dei numeri naturali.
Comprendere il principio di induzione non solo vi aiuterà nelle dimostrazioni matematiche, ma vi permetterà anche di apprezzare come la matematica si sviluppa attraverso ragionamenti logici e strutturati.

Il Principio di Induzione

Il principio di induzione matematica si basa su due passaggi fondamentali:

1. **Passo Base**: Dimostrare che la proprietà è vera per il primo valore naturale, generalmente $n = 0$ oppure $n = 1$.
2. **Passo Induttivo**: Assumere che la proprietà sia vera per un numero naturale $n = k$ (ipotesi induttiva) e dimostrare che, sotto questa assunzione, la proprietà è vera anche per $n = k + 1$.

Se questi due passaggi sono soddisfatti, possiamo concludere che la proprietà è vera per tutti i numeri naturali $n \geq n_0$, dove n_0 è il valore iniziale considerato nel passo base.

Perché funziona?
Immaginate una fila infinita di tessere del domino. Se riusciamo a far cadere la prima tessera (passo base) e dimostriamo che quando una tessera cade fa cadere la successiva (passo induttivo), allora tutte le tessere cadranno una dopo l'altra. Allo stesso modo, il principio di induzione garantisce che la proprietà è vera per ogni numero naturale.

Esempi di eserecizi svolti

Esempio 1: Somma dei primi n numeri naturali

Dimostriamo che per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Passo Base $(n = 1)$
Calcoliamo la somma:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1$$

Verifichiamo la formula:

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

Quindi, la formula è vera per $n = 1$.

Passo Induttivo
Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Dobbiamo dimostrare che è vera anche per $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1)$$

Sostituiamo l'ipotesi induttiva:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Mettiamo in evidenza $(k + 1)$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

Calcoliamo l'espressione tra parentesi:

$$\frac{k}{2} + 1 = \frac{k+2}{2}$$

Quindi:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Abbiamo ottenuto la formula per $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Quindi, la proprietà è vera per $n = k + 1$.

Esempio 2: Somma dei primi n numeri dispari

Dimostriamo che per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

Passo Base ($n = 1$)
Calcoliamo la somma:

$$\sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$

Verifichiamo la formula:

$$1^2 = 1$$

Quindi, la formula è vera per $n = 1$.

Passo Induttivo
Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$$

Dobbiamo dimostrare che è vera anche per $n = k+1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \left(\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\right) + [2(k+1)-1]$$

Sostituiamo l'ipotesi induttiva:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = k^2 + [2(k+1)-1]$$

Calcoliamo:

$$k^2 + [2(k+1)-1] = k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1$$

Osserviamo che:

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Quindi:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$$

Abbiamo dimostrato che la proprietà è vera per $n = k+1$.

Esempio 3: Somma dei cubi dei primi n numeri naturali

Dimostriamo che per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Passo Base ($n = 1$)
Calcoliamo la somma:

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$$

Verifichiamo la formula:

$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$$

Quindi, la formula è vera per $n = 1$.

Passo Induttivo
Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

Dobbiamo dimostrare che:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Calcoliamo:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{k} i^3\right) + (k+1)^3$$

Sostituiamo l'ipotesi induttiva:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

Calcoliamo $A = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$:

$$A = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

Raccogliamo $(k+1)^2$:

$$A = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right)$$

Calcoliamo l'espressione tra parentesi:

$$\frac{k^2}{4} + k + 1 = \frac{k^2 + 4k + 4}{4} = \frac{(k+2)^2}{4}$$

Quindi:

$$A = (k+1)^2\left(\frac{(k+2)^2}{4}\right) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Questo è:

$$A = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Quindi:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Abbiamo dimostrato che la proprietà è vera per $n = k+1$.

Esercizi proposti

1. **Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali**
   Dimostrare che per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. **Somma delle serie armoniche parziali**
   Dimostrare che per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Conclusione

Il principio di induzione matematica è un metodo potente e indispensabile per dimostrare proprietà che coinvolgono i numeri naturali. Grazie a esso, possiamo estendere la validità di una proprietà dal caso iniziale a tutti i numeri successivi, garantendo così la solidità delle nostre dimostrazioni.
La storia dell'induzione ci mostra come la matematica sia una costruzione cumulativa, basata su intuizioni che si raffinano nel tempo. Apprezzare questi strumenti vi permetterà di sviluppare un pensiero critico e analitico, utile non solo in matematica ma in molte altre discipline.