Regola di De L'Hôpital

by MagicSchool.ai

Erasmo Modica

Il Teorema di De L'Hôpital è un potente strumento utilizzato per valutare limiti di funzioni che si presentano sotto forma indeterminata. Permette di determinare il limite di una frazione, in cui sia il numeratore che il denominatore tendono a zero o all'infinito, derivando sia il numeratore che il denominatore e considerando il limite del rapporto delle derivate. Ecco come applicarlo.

Passo 1: Identifica la forma indeterminata che può essere caratterizzata dal fatto che sia il numeratore che il denominatore tendono a zero o all'infinito.
Passo 2: Deriva il numeratore e il denominatore separatamente.
Passo 3: Calcola il limite della nuova frazione costituita dal rapporto delle derivate.
Passo 4: Se il limite della nuova frazione produce ancora una forma indeterminata, ripeti i passi 2 e 3 fino a ottenere una forma determinata.

Ora vediamo alcuni esempi specifici per comprendere meglio il concetto.

Esempio 1: Trova il limite della funzione $\frac{x^2-4x}{x-2}$ quando x tende a 2.
Passo 1: La frazione data si presenta nella forma indeterminata $(\frac{0}{0})$ quando x tende a 2.
Passo 2: Derivando il numeratore e il denominatore otteniamo $\frac{2x-4}{1}$.
Passo 3: La nuova frazione è $\frac{2x-4}{1}$.
Passo 4: Valutando il limite della nuova frazione quando x tende a 2 otteniamo $\frac{2\cdot 2-4}{1} = 0$.
Passo 5: Il limite della funzione data è 0.

Esempio 2: Trova il limite della funzione $\frac{e^x-1}{x^2}$ quando x tende a 0.
Passo 1: La frazione data si prrsenta nella forma indeterminata $(\frac{0}{0})$ quando x tende a 0.
Passo 2: Derivando il numeratore e il denominatore otteniamo $\frac{e^x}{2x}$.
Passo 3: La nuova frazione è $\frac{e^x}{2x}$.
Passo 4: Valutando il limite della nuova frazione quando x tende a 0 otteniamo $\frac{e^0}{2\cdot 0} = \frac{1}{0}$.
Passo 5: Il limite della funzione data è indefinito.

Esempio 3: Trova il limite della funzione $\frac{\sin(x)}{x}$ quando x tende a 0.

Passo 1: La frazione data si presenta nella forma indeterminata $(\frac{0}{0})$ quando x tende a 0.
Passo 2: Derivando il numeratore e il denominatore otteniamo $\frac{\cos(x)}{1}$.
Passo 3: La nuova frazione è $\frac{\cos(x)}{1}$.
Passo 4: Valutando il limite della nuova frazione quando x tende a 0 otteniamo $\frac{\cos(0)}{1} = 1$.
Passo 5: Il limite della funzione data è 1.