Il moto uniformemente accelerato

Prof. E. Modica
www.galois.it

La velocità cambia...

- Quando andiamo in automobile, la nostra velocità non si mantiene costante. Basta pensare all'obbligo di fermarsi in prossimità di uno STOP, oppure di un semaforo.
- Appena azioniamo i freni, la nostra velocità diminuisce fino a diventare pari a zero nell'istante in cui si avrà l'arresto del veicolo.
- È quindi necessario introdurre una grandezza che renda conto della variazione della velocità di un corpo.

L'accelerazione media

- **Definizione**. Dicesi **accelerazione media** (**a_m**) di un punto materiale che si muove di moto rettilineo, il rapporto fra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo in cui si verifica tale variazione. In formule:

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}}$$

Essa si misura in metri al secondo quadrato (m/s^2)

$$[a_m] = \left[\frac{l}{t^2}\right] = [lt^{-2}]$$

Esempio 1

- Un'automobile è ferma al semaforo e quando scatta il verde raggiunge una velocità di 10 m/s in 4 s. Determina l'accelerazione media dell'automobile.

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{10 - 0}{4 - 0} = 2,5\frac{m}{s^2}$$

Esempio 2

- Determina la decelerazione media di un'automobile che in 5 s riduce la sua velocità da 72 km/h a 36 km/h.

Scriviamo le velocità usando le unità di misura del SI:

$$v_1 = \frac{72}{3,6} = 20\frac{m}{s} \qquad v_2 = \frac{36}{3,6} = 10\frac{m}{s}$$

La decelerazione media è quindi data da:

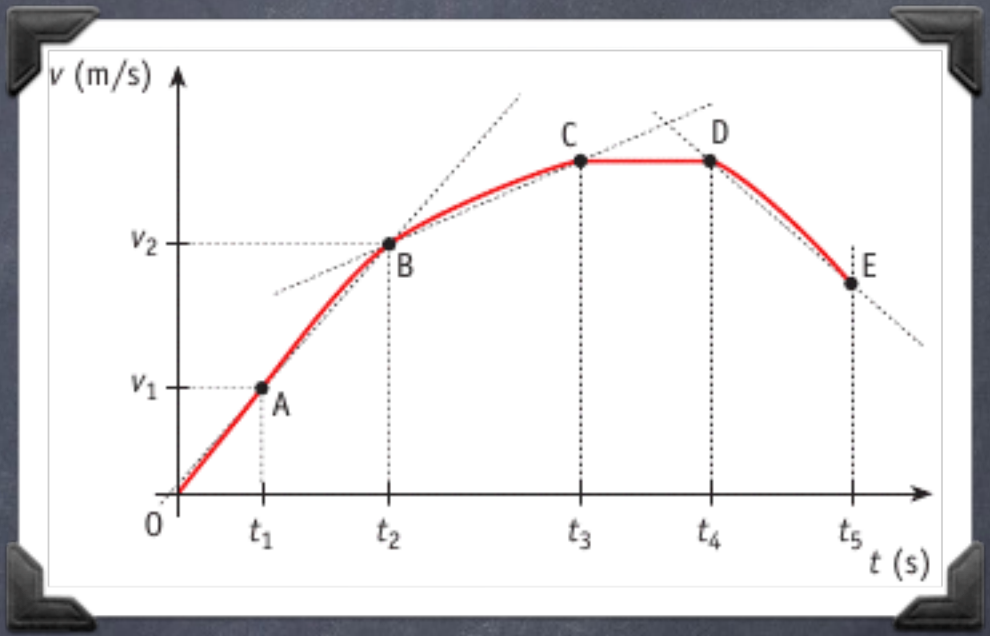
$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10-20}{5} = \frac{-10}{5} = -2\frac{m}{s^2}$$

Il grafico velocità-tempo

- L'accelerazione media tra t_2 e t_3 è minore di quella tra t_1 e t_2, in quanto la retta secante per B e C ha pendenza minore di quella per A e B.

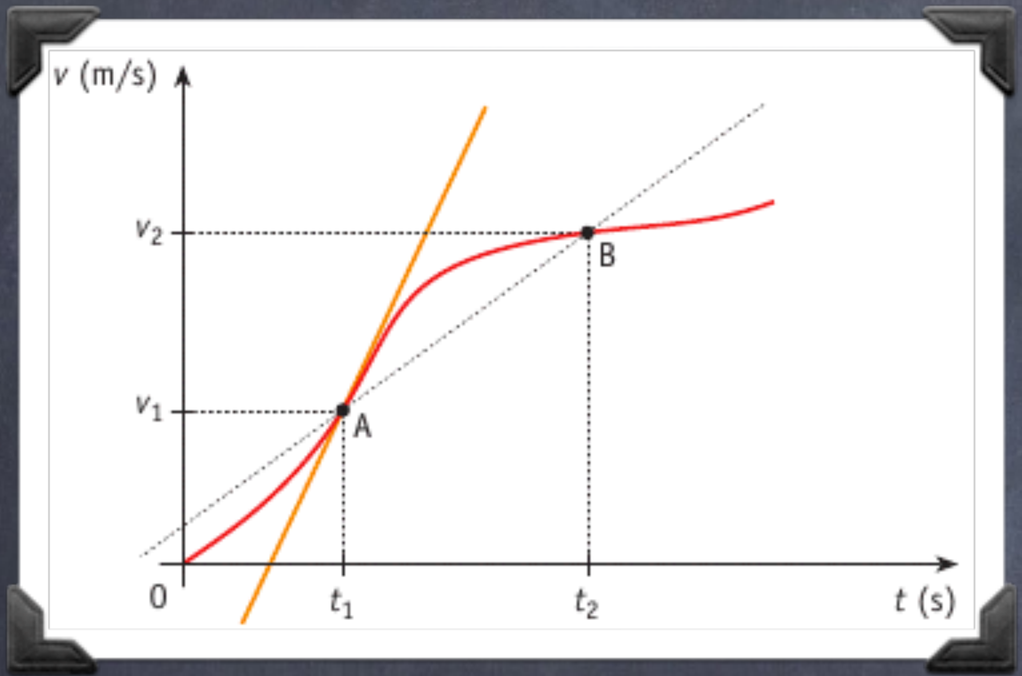
- La velocità tra t_3 e t_4 è costante e quindi l'accelerazione è pari a zero.

- Tra t_4 e t_5 la retta secante per D e per E ha coefficiente angolare negativo e quindi l'accelerazione media del corpo è negativa.



Il diagramma orario rappresenta l'andamento della velocità di un corpo in funzione del tempo

L'accelerazione istantanea



L'accelerazione istantanea all'istante t_1 è il coefficiente angolare della retta tangente al diagramma orario nel punto di coordinate $(t_1; v_1)$

$$a' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Il moto rettilineo uniformemente accelerato

- Definizione. Si dice moto rettilineo uniformemente accelerato un moto che avviene in linea retta ad accelerazione costante.
- Conseguenza. Essendo costante l'accelerazione, le variazioni di velocità Δv sono direttamente proporzionali agli intervalli di tempo Δt.

Legge oraria della velocità in funzione del tempo

Se si considera un corpo che all'istante t=0 si muove con una velocità v_0 e si considera un istante t successivo, l'accelerazione media sarà data da:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

Essendo t_0=0 s, si ha:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 + at$$

Osservazioni

- Il prodotto **at** fornisce la variazione di velocità del punto nell'intervallo di tempo $\Delta t = t - 0$, di conseguenza possiamo scrivere la velocità del punto come la somma della velocità iniziale e dell'aumento di velocità avvenuto in quell'intervallo di tempo:

  $\mathbf{v = v_0 + \Delta v}$

- Se la velocità del corpo è nulla al tempo $t_0=0$ l'equazione oraria della velocità diventa:

  $\mathbf{v = at}$

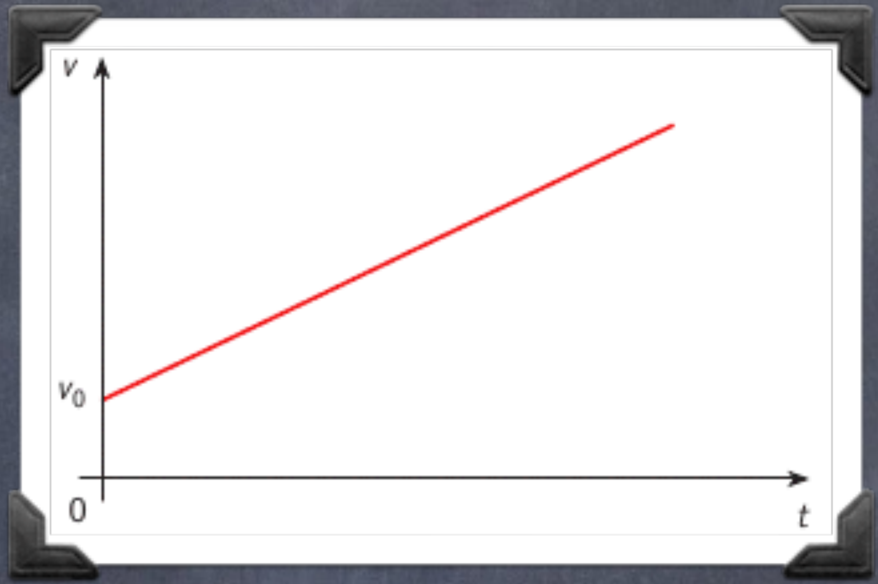
Esempio

- Una vettura viaggia su un tratto rettilineo alla velocità di 20 m/s. In fase di sorpasso il conducente accelera per 8 s con un'accelerazione costante di 2 m/s^2. Calcola la velocità raggiunta dall'autovettura.

Per determinare la velocità finale, usiamo l'equazione oraria della velocità e otteniamo:

$$v = v_0 + at \Rightarrow v(20) = 20 + 2 \cdot 8 = 36 \frac{m}{s}$$

Dal diagramma all'equazione

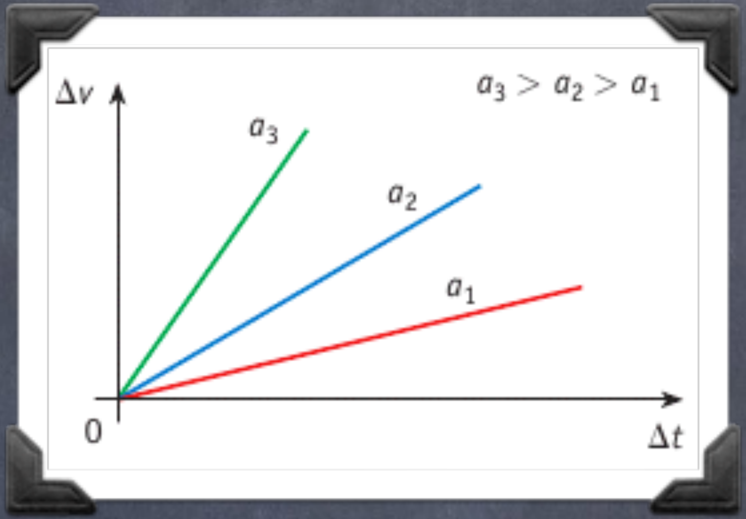


$$y = m\,x + q \quad \rightarrow \quad v = a\,t + v_0$$

v_0 corrisponde all'intercetta all'origine

a è il coefficiente angolare della retta

Accelerazione e pendenza



Maggiore è l'angolo che la retta forma con il semiasse dei tempi, maggiore è l'accelerazione del corpo.

Legge oraria del moto uniformemente accelerato (1)

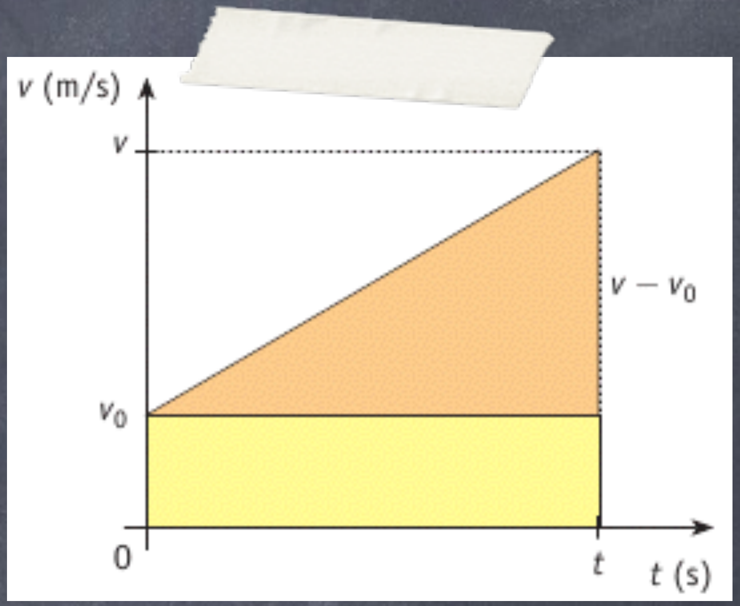
- Abbiamo già visto che l'area sotto il grafico del diagramma velocità-tempo, nel caso del moto rettilineo uniforme, fornisce lo spazio percorso dal corpo in un dato intervallo di tempo.
- Tale risultato può essere generalizzato a qualsiasi grafico velocità-tempo, quindi anche a quello del moto rettilineo uniformemente accelerato.

Legge oraria del moto uniformemente accelerato (2)

- Nel grafico a fianco è rappresentata l'equazione $v=v_0+at$

- Calcoliamo la distanza Δs percorsa dal punto materiale nell'intervallo di tempo $\Delta t=t-0=t$

- In base a quanto detto, lo spazio percorso corrisponde all'area del trapezio rettangolo di altezza t e di basi v_0 e v_0+at



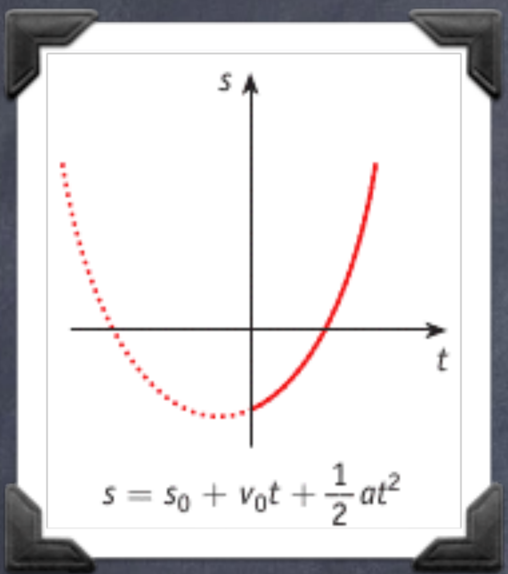
$$\Delta s = \frac{1}{2}\left[v_0 + (v_0+at)\right]\cdot t = \frac{1}{2}(2v_0+at) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Legge oraria del moto uniformemente accelerato (3)

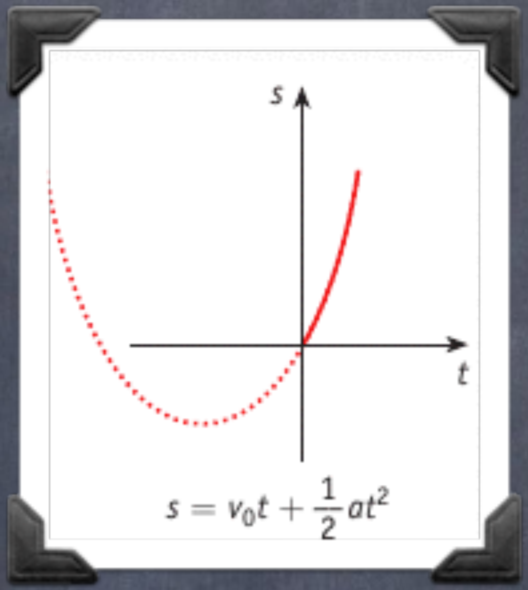
- Se, nella precedente equazione, si sostituisce $\Delta s = s - s_0$, si ottiene l'equazione oraria del moto uniformemente accelerato.

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

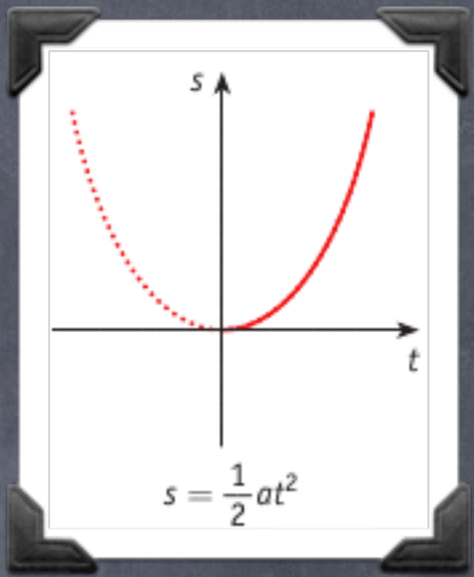
Diagramma orario s-t



Tratto di parabola che corrisponde ai valori positivi del tempo



Se s_0=0, il diagramma orario passa per l'origine degli assi



Se s_0=0 e la velocità iniziale v_0=0, il diagramma orario è un ramo di parabola col vertice nell'origine degli assi

Esercizio

- Descrivere le caratteristiche delle seguenti leggi orarie, utilizzando le unità del SI.

$$a) s = 2t^2 \qquad b) s = 20t - t^2 \qquad c) s = 2t + 2t^2 - 50$$

a) Rappresenta un moto uniformemente accelerato con s_0=0 e v_0=0. La sua accelerazione è pari a 4 m/s^2, in quanto il coefficiente (2) di t^2 è pari alla metà del valore dell'accelerazione.

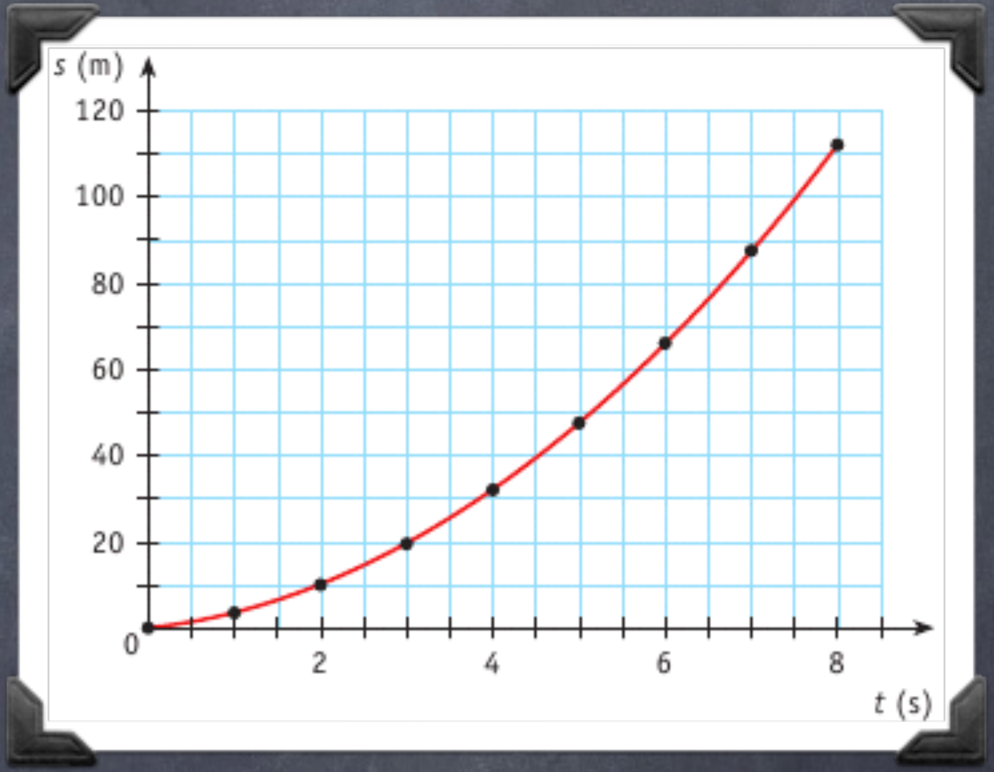
b) Rappresenta un moto uniformemente accelerato con s_0=0, v_0= 20 m/s e a=-2 m/s^2.

c) Rappresenta un moto uniformemente accelerato con s_0=-50 m, v_0= 2 m/s e a=4 m/s^2.

Esercizio

- Un corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato. Determinare la legge oraria del moto sapendo che $s_0=0$, $v_0=2$ m/s e $a=3$ m/s^2.

$$s(t) = 2t + \frac{3}{2}t^2$$



tempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
posizione (m)	0	3,5	10	19,5	32	47,5	66	87,5	112

Le equazioni del moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

I equazione derivata

- In un moto uniformemente accelerato si ha:

$$\boxed{\Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}}$$

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Ricavando il tempo dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, si ottiene:

$$\begin{cases} t = \frac{v - v_0}{a} \\ \Delta s = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 \end{cases}$$

Semplificando la seconda equazione si ha:

$$\Delta s = \frac{vv_0 - v_o^2}{a} + \frac{1}{2}\frac{v^2 + v_0^2 - 2vv_0}{a} = \frac{2vv_0 - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2vv_0}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

II equazione derivata

- In un moto uniformemente accelerato si ha:

$$\boxed{\Delta s = \left(\frac{v+v_0}{2}\right) t}$$

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Ricavando l'accelerazione dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, si ottiene:

$$\begin{cases} a = \frac{v-v_0}{t} \\ \Delta s = v_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{v-v_0}{t}\right) t^2 \end{cases}$$

Semplificando la seconda equazione si ha:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2} v t - \frac{1}{2} v_0 t = \frac{1}{2} v t + \frac{1}{2} v_0 t = \frac{1}{2}(v+v_0)t$$

III equazione derivata

- In un moto uniformemente accelerato si ha:

$$\boxed{\Delta s = vt - \frac{1}{2}at^2}$$

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Ricavando la velocità iniziale dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, si ottiene:

$$\begin{cases} v_0 = v - at \\ \Delta s = (v - at)t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Semplificando la seconda equazione si ha:

$$\Delta s = vt - at^2 + \frac{1}{2}at^2 = vt - \frac{1}{2}at^2$$

Equazioni del moto uniformemente accelerato

Equazione	Grandezza mancante
$v = v_0 + at$	Δs
$\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$	t
$\Delta s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a
$\Delta s = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0

Problema (1)

- Avvistando una pattuglia della polizia stradale, frenate la vostra Porsche da 75 km/h a 45 km/h nello spazio di 88 m.

a) Qual è l'accelerazione supposta costante?

Le velocità espresse in unità del SI sono: v_1=20,83 m/s e v_2=12,5 m/s. Dalla prima equazione derivata segue che:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta s} = \frac{(12,5)^2 - (20,83)^2}{2 \cdot 88} \approx -1,6 m/s^2$$

b) Per quanto tempo dovete frenare?

Dalla seconda equazione derivata segue che:

$$t = \frac{2 \cdot \Delta s}{v + v_0} = \frac{2 \cdot 88}{12,5 + 20,83} \approx 5,4 s$$

Problema (2)

- Avvistando una pattuglia della polizia stradale, frenate la vostra Porsche da 75 km/h a 45 km/h nello spazio di 88 m.

c) Se continuate a frenare con l'accelerazione calcolata in a) quanto tempo occorrerebbe per arrivare all'arresto completo da 75 km/h?

Dalla definizione di accelerazione segue che:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 20,83}{-1,6} \approx 13s$$

d) Nell'intervallo calcolato in c), qual è la distanza percorsa?

Utilizzando l'equazione oraria del moto si ha:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = (20,83) \cdot (13) + \frac{1}{2}(-1,6) \cdot (13)^2 \approx 135,6m$$

Problema (3)

- Avvistando una pattuglia della polizia stradale, frenate la vostra Porsche da 75 km/h a 45 km/h nello spazio di 88 m.

c) Supponiamo che un'altra volta, con la stessa accelerazione costante ricavata in a), ma partendo da una diversa velocità iniziale, riuscite a fermare la macchina in 200 m. Qual è il tempo totale di arresto?
Utilizzando la terza equazione derivata, in cui si pone v=0, in quanto la vettura si arresta, si ha:

$$\Delta s = -\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t^2 = -\frac{2 \cdot \Delta s}{a} \Rightarrow t = \sqrt{-\frac{2 \cdot \Delta s}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{-\frac{2 \cdot 200}{-1,6}} = \sqrt{250} \approx 16s$$

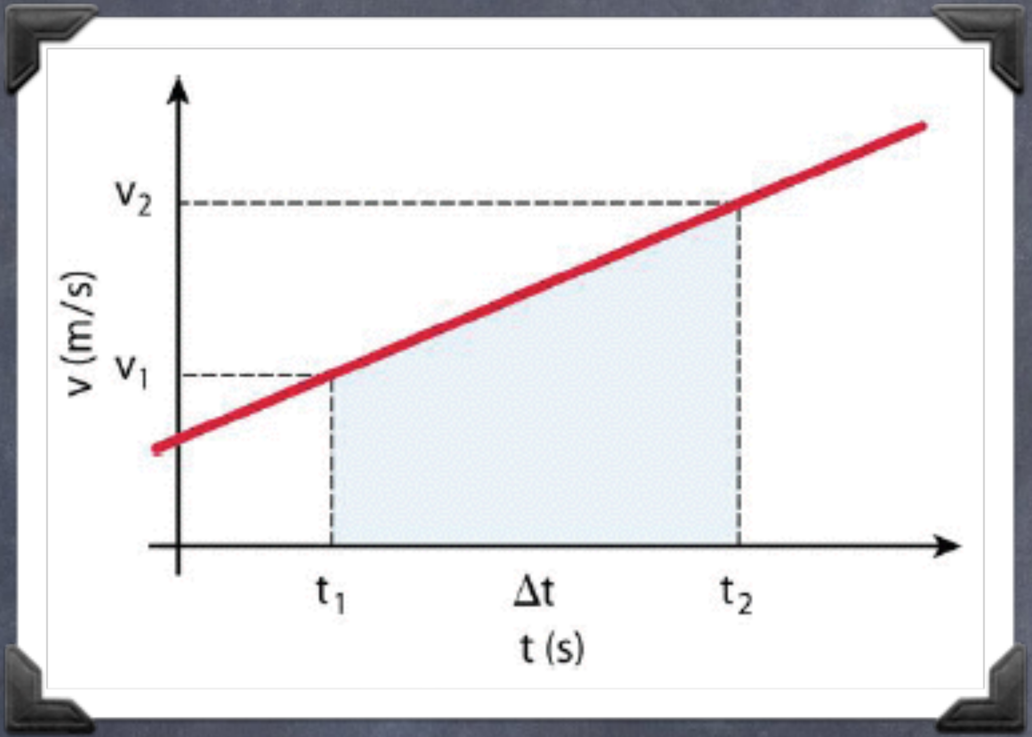
Velocità media di un moto rettilineo uniformemente accelerato (1)

- Proposizione. Se un corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, la velocità media è la media delle velocità iniziale e finale. In formule:

$$\overline{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Supponiamo che un corpo si muova con accelerazione costante passando dalla velocità v_1 all'istante t_1 alla velocità v_2 all'istante t_2 e supponiamo che in tale intervallo di tempo compia uno spostamente Δs.

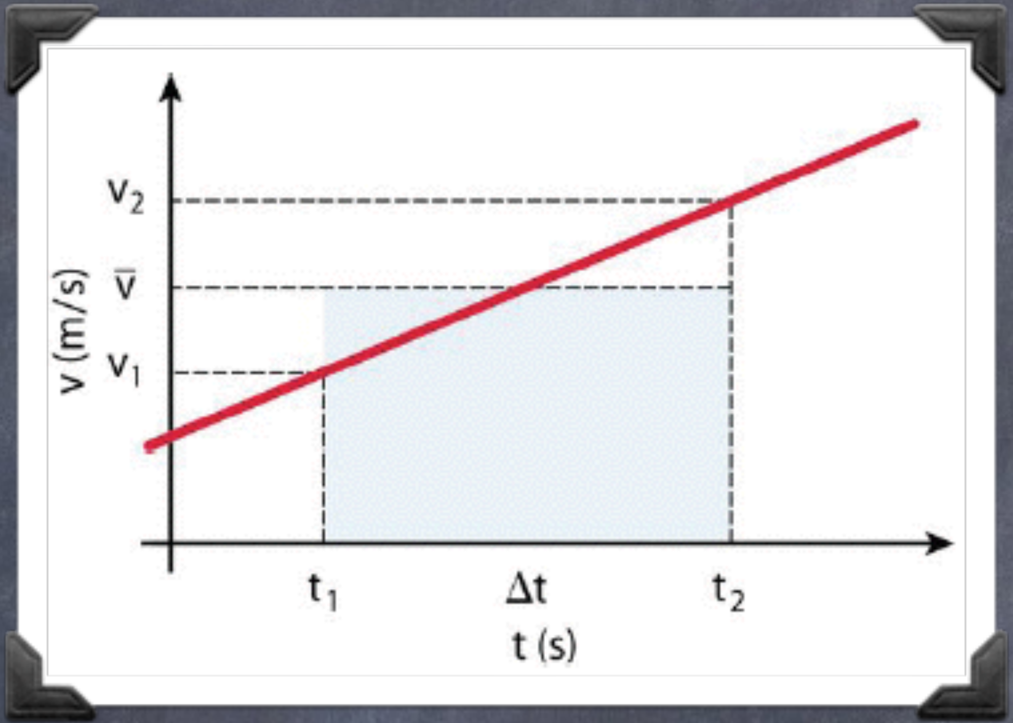
Velocità media di un moto rettilineo uniformemente accelerato (2)



Lo spostamento del corpo è uguale all'area del trapezio sotto il grafico v-t nell'intervallo Δ t, ossia:

$$\Delta s = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \cdot \Delta t$$

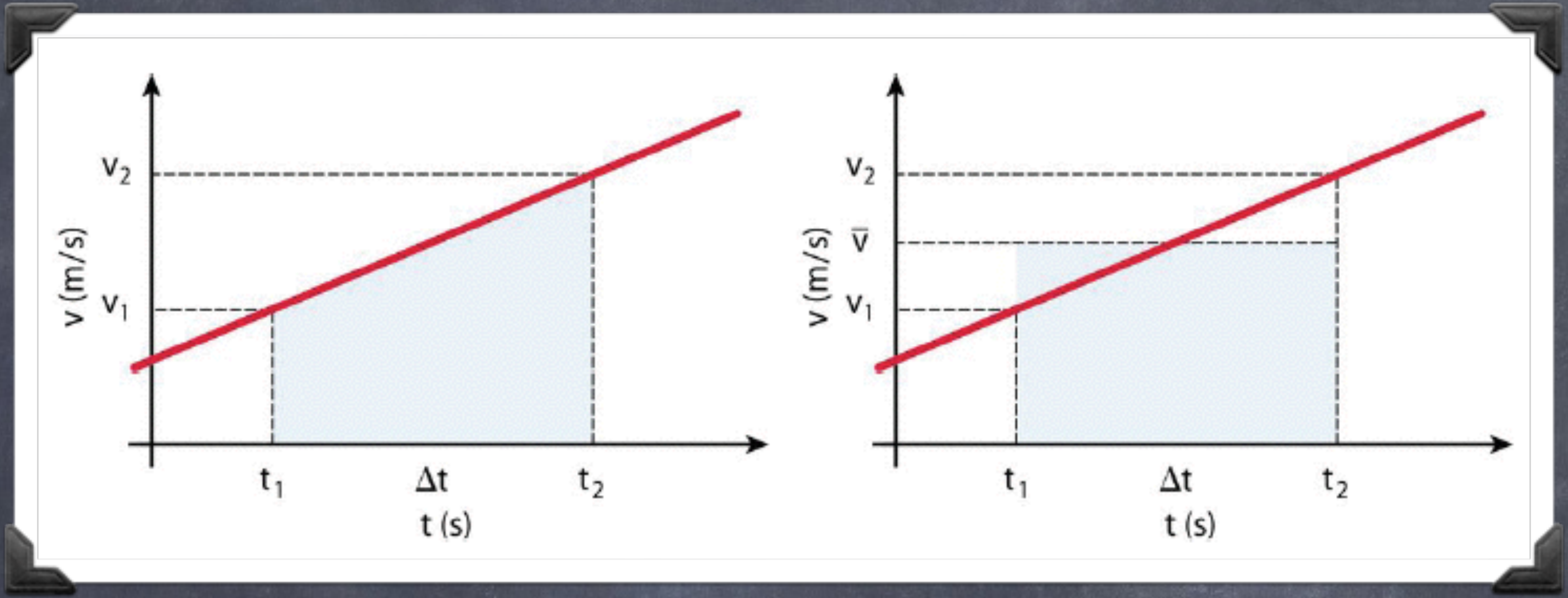
Velocità media di un moto rettilineo uniformemente accelerato (3)



Un corpo che si muove a velocità costante, nello stesso intervallo di tempo compie uno spostamento uguale all'area del rettangolo colorato, ossia pari a:

$$\Delta s = \overline{v} \cdot \Delta t$$

Velocità media di un moto rettilineo uniformemente accelerato (4)



Osservando i due grafici è possibile notare che l'area del trapezio e l'area del rettangolo sono uguali e, quindi, sono uguali i due spostamenti. Pertanto si avrà:

$$\overline{v} \cdot \Delta t = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \cdot \Delta t \Rightarrow \overline{v} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

Problema

- Il moto di un punto materiale è descritto dalla legge oraria: $s=2t^2-t+2$. a) Determinare le caratteristiche del moto. b) Dove si trova il corpo dopo 10 s? c) Dopo quanto tempo si trova a 1 m dall'origine?

a) Rappresenta un moto uniformemente accelerato con $s_0=2$ m, $v_0=-1$ m/s e $a=4$ m/s^2.
b) Basta sostituire il valore 10 s nell'equazione del moto:

$$s(10) = 2 \cdot (10)^2 - 10 + 2 = 200 - 10 + 2 = 192m$$

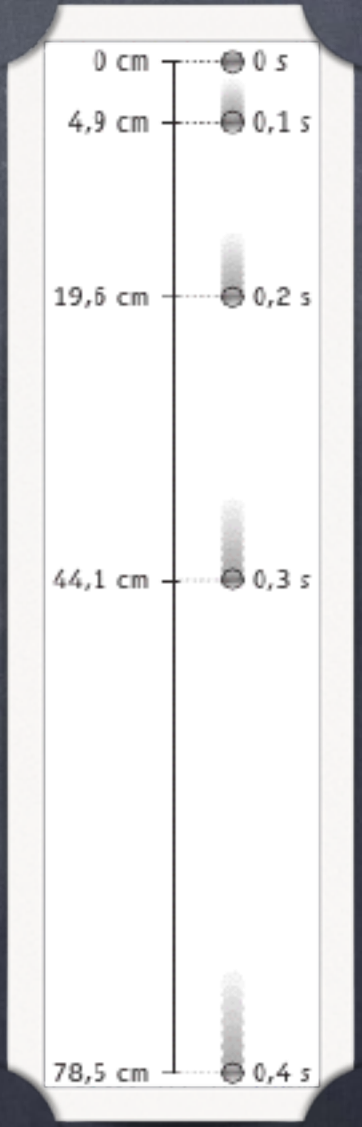
c) Basta porre, nella legge oraria, al posto della posizione s il valore 1 m e si risolve l'equazione di secondo grado ottenuta.

$$2t^2 - t + 2 = 1 \Rightarrow 2t^2 - t + 1 = 0$$

Risolvendo si ottengono le soluzioni $t_1=-0,5$ e $t_2= 1$ s, delle quali accettiamo solo la seconda.

Il moto di caduta libera

- Supponiamo di lasciare cadere una pallina da una certa altezza e supponiamo che non vi sia alcun attrito.
- Se si misurano le distanze percorse e gli intervalli di tempo impiegati, si può verificare che **tali distanze sono direttamente proporzionali ai quadrati degli intervalli di tempo**.



L'accelerazione di gravità

- L'accelerazione costante con cui un corpo cade verso il suolo prende il nome di **accelerazione di gravità** e viene indicata con la lettera g.
- In prossimità della superficie terrestre, l'accelerazione di gravità vale in media **9,81 m/s²**.

$$\boxed{g = 9,81\frac{m}{s^2}}$$

Equazioni del moto di caduta libera

- Essendo un moto che avviene ad accelerazione costante, le leggi del moto di caduta libera sono le stesse equazioni del moto rettilineo uniformemente accelerato, nelle quali al posto di "a" troviamo "g".

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \\ v = v_0 + g t \end{cases}$$

Caso particolare

- Se il grave viene lasciato cadere da fermo (ossia se $v_0=0$) e a partire dall'origine del sistema di coordinate (ossia $s_0=0$), le precedenti equazioni diventano:

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}gt^2 \\ v = gt \end{cases}$$

Problema

- Un sasso viene lasciato cadere da un balcone di 15 m. Calcola quanto tempo impiega il sasso per giungere a terra e la velocità con cui s'impatta sul suolo.

Le velocità iniziale del sasso è uguale a zero. Utilizzando la legge oraria del moto si ha:

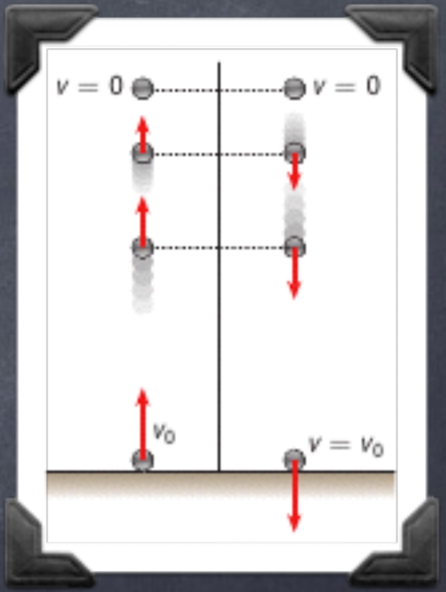
$$s = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15}{9,81}} = 1,75s$$

Per determinare la velocità, utilizziamo la seconda equazione:

$$v = gt = 9,81 \cdot 1,75 = 17,2\frac{m}{s}$$

Moto di un oggetto lanciato verso l'alto

- Si consideri un oggetto puntiforme lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale non nulla e in assenza di attrito.
- L'oggetto sale fino a una certa quota e ridiscende lungo la stessa traiettoria rettilinea con accelerazione costante.
- Il moto di tale grave è un **moto rettilineo uniformemente decelerato** e viene chiamato **moto naturalmente decelerato**.



Equazioni del moto naturalmente decelerato

- Essendo un moto che avviene con una decelerazione costante, le leggi del moto di caduta libera sono le stesse equazioni del moto di caduta libera, nelle quali al posto di "g" troviamo "-g".

$$\boxed{\begin{cases} s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v = v_0 - g t \end{cases}}$$

Problema

- Un sasso viene lasciato verticalmente verso l'alto con una velocità di 5,0 m/s. Quanto tempo impiega per salire alla massima altezza? Di quanto sale rispetto al punto di lancio?

Essendo alla massima altezza la velocità finale nulla, si ha:

$$v = v_0 - gt \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{-g} = \frac{0 - 5}{-9,81} = 0,51s$$

La distanza percorsa si ricava dalla relazione:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 5 \cdot 0,51 - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot (0,51)^2 = 1,3m$$