Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro"

# Applicazioni delle derivate alla Fisica

*Prof. E. Modica*
erasmo@galois.it

# Indice



## 1 Intensità di corrente elettrica

Si consideri la funzione $q = q(t)$ che descrive la quantità di carica elettrica che, nell'intervallo di tempo $[0; t]$, attraversa la sezione di un conduttore elettrico. Sia $q(t + \Delta t)$ la quantità di carica che attraversa la stessa sezione nell'intervallo di tempo $[0; t + \Delta t]$ e si consideri il seguente rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$$

Tale rapporto incrementale tra la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore nell'intervallo di tempo $\Delta t$ e l'intervallo di tempo stesso, rappresenta l'**intensità di corrente elettrica media** che attraversa il conduttore nell'intervallo $(t; t + \Delta t)$.
Se esiste ed è finito il:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$$

tale valore finito fornisce il valore dell'intensità di corrente all'istante $t$, cioè:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = q'(t)$$

**Nota 1.** La derivata della funzione $q = q(t)$ fornisce il valore della correntre elettrica che attraversa il conduttore al tempo $t$.

**Esempio 1.** *La quantità di carica $q$ (in C) che passa attraverso una superficie di area $2,0\ cm^2$ varia nel tempo secondo l'equazione $q(t) = 4t^3 + 5t + 6$ dove $t$ è espresso in secondi.*

*a) Qual è la corrente istantanea attraverso la superficie a $t = 1,0$ s?*

*b) Dopo quanto tempo il valore della corrente elettrica è pari a 53,0 A?*

*Soluzione*
L'espressione della corrente elettrica in funzione del tempo si ottiene derivando $q(t)$ rispetto al tempo $t$, cioè:

$$i(t) = q'(t) = 12t^2 + 5$$

a) La corrente istantanea dopo 1,0 s si ottiene sostituendo il valore 1,0 s nell'espressione precedente, cioè:

$$i(1,0s) = 12 \cdot (1,0)^2 + 5 = 17,0A$$

b) Per determinare il valore di $t$ desiderato, basta sostituire al posto di $i$ nell'equazione della corrente istantanea in funzione del tempo, il valore 2 A e risolvere la corrispondente equazione:

$$53,0 = 12t^2 + 5$$

Si ha quindi:

$$12t^2 = 48 \quad \rightarrow \quad t^2 = 4 \quad \rightarrow \quad t = \pm 2s$$

Di conseguenza, l'istante cercato è $t = 2,0$ s.

# 2 Tensione e corrente ai capi di un condensatore

Sia dato un condensatore di capacità $C$ dipendente solo dalle sue caratteristiche fisiche e non variabile nel tempo. La carica presente sulle armature al variare del tempo $t$ in funzione della differenza di potenziale fra le due armature è data dalla funzione:

$$Q(t) = C \cdot V(t)$$

Consideriamo il seguente rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

Tale rapporto esprime l'**intensità media della corrente di carica o di scarica del condensatore** relativa all'intervallo di tempo $\Delta t$. Facendo tendere a zero $\Delta t$, si avrà:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = i(t)$$

ovvero l'intensità della corrente di carica o di scarica istantanea.
Partendo dall'equazione $Q(t) = C \cdot V(t)$, consideriamo il rapporto incrementale della funzione $C \cdot V(t)$ nell'intervallo di tempo $\Delta t$:

$$\frac{\Delta(CV)}{\Delta t} = \frac{CV(t + \Delta t) - CV(t)}{\Delta t} = \frac{C[V(t + \Delta t) - V(t)]}{\Delta t} = C \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Facendo tendere a zero $\Delta t$, si avrà:

$$\lim_{\Delta t \to 0} C \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} = C \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = C \cdot \frac{dV}{dt} = C \cdot V'(t)$$

In definitiva avremo che:

$$i(t) = C \cdot V'(t)$$

**Nota 2.** La relazione esprime il legame fra l'intensità di corrente di carica o di scarica di un condensatore di capacità $C$ e la tensione $V$ ai suoi capi.

**Esempio 2.** *Sia dato un condensatore di capacità $C = 2\ mF$ tra le cui armature è presente una differenza di potenziale regolata dalla legge $V(t) = 2 \cdot \ln(t^2 + 1)$, con $V$ espresso in volt. Determinare la corrente di carica all'istante $t = 3,0\ s$.*

*Soluzione*
L'espressione della corrente elettrica in funzione del tempo si ottiene derivando $i(t)$ rispetto al tempo $t$ e moltiplicando per $C$, cioè:

$$i(t) = C \cdot V'(t) = C \cdot 2 \cdot \frac{2t}{t^2 + 1}$$

La corrente istantanea dopo 3,0 s si ottiene sostituendo il valore 3,0 s nell'espressione precedente, cioè:

$$i(3,0s) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{3^2 + 1} = \frac{24 \cdot 10^{-3}}{10} = 2,4 \cdot 10^{-3} A$$

## 3 Forza elettromotrice indotta

Si consideri un circuito elettrico chiuso di superficie $A$ e si consideri il flusso $\Phi$ del campo magnetico $\vec{B}$ concatenato e variabile nel tempo:

$$\Phi(\vec{B}) = \Phi(t)$$

Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz sappiamo che la forza elettromotrice media indotta $f_m$ è data dalla relazione:

$$f_m = -\frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}$$

Facendo tendere a zero $\Delta t$, si avrà la forza elettromotrice indotta istantanea:

$$f_i = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\Phi'(t)$$

**Nota 3.** L'opposto della derivata della funzione $\Phi = \Phi(t)$ fornisce il valore della forza elettromotrice indotta al tempo $t$.

**Esempio 3.** *Il flusso attraverso una spira è dato da $\Phi_m(t) = 0,10t^2 - 0,40t$, dove $\Phi_m$ è espresso in weber e $t$ in secondi. Determinare la f.e.m. indotta in funzione del tempo e, successivamente, i suoi valori al tempo $t = 4,0\ s$ e $t = 6,0\ s$.*

*Soluzione*
L'espressione della f.e.m. indotta in funzione del tempo si ottiene derivando $\Phi_m(t)$ rispetto al tempo $t$, cioè:

$$f(t) = -\Phi'_m(t) = -0,20t + 0,40$$

Determiniano i valori della forza elettromotrice indotta negli istanti $t = 4,0$ s e $t = 6,0$ s:

$$f(4,0s) = -\Phi'_m(4,0s) = -0,20 \cdot 4,0 + 0,40 = -0,4V$$

$$f(6,0s) = -\Phi'_m(6,0s) = -0,20 \cdot 6,0 + 0,40 = -0,8V$$

# 4 Forza elettromotrice autoindotta

Nello studio del fenomeno dell'autoinduzione è possibile notare come il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito in cui scorre la corrente elettrica $i(t)$ è direttamente proporzionale a $i(t)$ secondo la costante $L$, detta **induttanza**. In formule si ha:

$$\Phi(t) = L \cdot i(t)$$

Se la corrente, nell'intervallo di tempo $\Delta t$, passa dal valore $i(t)$ al valore $i(t + \Delta t)$, la variazione di flusso sarà data da:

$$\Delta\Phi = \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t) = Li(t + \Delta t) - Li(t) = L[i(t + \Delta t) - i(t)] = L\Delta i$$

La forza elettromotrice autoindotta $f_a$ all'istante $t$ sarà data da:

$$f_a = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = -L \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta t} = -L\frac{di}{dt} = -Li'(t)$$

**Nota 4.** La derivata della funzione $i = i(t)$ moltiplicata per l'opposto dell'induttanza fornisce il valore della forza elettromotrice autoindotta che scorre nel conduttore al tempo $t$.

**Esempio 4.** *In un induttore di 90,0 mH la corrente varia nel tempo come $i(t) = t^2 - 6t$, dove i è espresso in ampere e t in secondi.*

*a) Si trovi la forza elettromotrice indotta negli istanti $t = 1,0$ s e $t = 4,0$ s.*

*b) In quale istante la f.e.m. è nulla?*

*Soluzione*
L'espressione della f.e.m. autoindotta in funzione del tempo si ottiene derivando $i(t)$ rispetto al tempo $t$ e moltiplicando per $-L$, cioè:

$$f_a(t) = -L \cdot i'(t) = -L \cdot (2t - 6)$$

a) La f.e.m. autoindotta dopo 1,0 s si ottiene sostituendo il valore 1,0 s nell'espressione precedente, cioè:

$$f_a(1,0s) = -90 \cdot 10^{-3}(2 - 6) = 0,36V$$

Allo stesso modo determiniamo la f.e.m autoindotta dopo 4,0 s:

$$f_a(4,0s) = -90 \cdot 10^{-3}(8 - 6) = -0,18V$$

dove il segno meno indica che il verso della f.e.m. è contrario rispetto a quello del caso precedente.
b) Per determinare il valore di $t$ basta porre uguale a zero l'espressione della f.e.m. autoindotta. Si ha quindi:

$$-L \cdot (2t - 6) = 0 \quad \rightarrow \quad 2t = 6 \quad \rightarrow \quad t = 3,0s$$

# 5 Esercizi applicativi

**Esercizio 1.** La carica totale (in C) trasportata da una corrente elettrica segue la legge $q(t) = 10\sin(20\pi t)$, con $t$ espresso in secondi. Qual è la corrente istantanea dopo 10 s?

**Esercizio 2.** La carica (in C) che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo dalla funzione $q(t) = 2e^{3t}\sin t$. Determinare l'intensità della corrente dopo 10 s.

**Esercizio 3.** La carica (in C) che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo (in s) dalla relazione $q(t) = t^3 - 3t^2 + 4t + 2$. Determinare l'intensità di corrente dopo 1 s e dopo 2 s.

**Esercizio 4.** La carica (in C) che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo (in s) dalla relazione $q(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 24t + 1 + 2$. In quali istanti l'intensità di corrente è pari a zero?

**Esercizio 5.** Si consideri una spira di superficie $A = 20\ cm^2$, immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ e libera di ruotare attorno a un asse perpendicolare alle linee di forza del campo magnetico. La spira ruota con velocità angolare costante $\omega = 1,3\ rad/s$. Sapendo che l'intensità del campo magnetico è $B = 0,5\ T$, determinare il valore della forza elettromotrice indotta all'istante $t = 25\ s$.

**Esempio 5.** La quantità di carica $q$ (in C) che passa attraverso una superficie di area $3,0\ mm^2$ varia nel tempo secondo l'equazione $q(t) = \ln(\sin(t^2 + 1))$ dove $t$ è espresso in secondi.

a) Qual è la corrente istantanea attraverso la superficie a $t = 2,0$ s?

b) Dopo quanto tempo il valore della corrente elettrica è pari a 3,0 A?

**Esercizio 6.** Una bobina circolare di 30 spire, di raggio 4,0 cm e di resistenza totale 1 Ω si trova in un campo magnetico perpendicolare al piano della bobina. Il modulo del campo magnetico varia nel tempo secondo la legge $B(t) = 0,01t + 0,04t^2$, con $t$ espresso in secondi e $B$ in tesla. Si determini la f.e.m. indotta nella bobina all'istante $t = 5,0$ s.

**Esercizio 7.** La sezione trasversale di un conduttore è attraversata da una carica elettrica (in C) variabile nel tempo (in s) regolata dalla relazione $q(t) = e^{-2t+4}$. Determinare l'intensità di corrente elettrica che scorre nel conduttore dopo 8 s.

**Esercizio 8.** Sia dato un condensatore di capacità $C = 5$ mF tra le cui armature è presente una differenza di potenziale regolata dalla legge $V(t) = 2 \cdot e^{t^2+1}$, con $V$ espresso in volt. Determinare la corrente di carica all'istante $t = 10,0$ s.

**Esercizio 9.** Si consideri un condensatorre piano di capacità $C$ collegato a un generatore di tensione alternata $E = E_0\sin(\omega t)$. Si dimostri che l'espressione dell'intensità di corrente è data dalla seguente relazione:

$$i(t) = E_0 C\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

**Esercizio 10.** A un condensatore di capacità $C = 100\,\mu F$ è applicata una tensione alternata regolata dalla legge $V = 20 \sin \omega t$ Determinare la corrente dopo 10 s, sapendo che $\omega = 2,6\ rad/s$.

**Esercizio 11.** Un induttore $L = 12,5\ mH$ è attraversato da una corrente regolata dalla legge $i = 20\sqrt{2} \sin\left(400t - \frac{\pi}{3}\right)$. Determinare l'espressione della tensione istantanea e stabilire dopo quanto tempo essa è uguale a $20\sqrt{2}\ A$.

**Esercizio 12.** Il flusso attraverso una spira è dato da $\Phi_m(t) = 0,10t^2 - 0,40t$, dove $\Phi_m$ è espresso in weber e $t$ in secondi.

a) Tracciare il grafico del flusso magnetico e della f.e.m. in funzione del tempo.

b) A quale/i tempo/i il flusso è minimo? Qual è la f.e.m. indotta a questo/i tempo/i?

c) A quale/i tempo/i il flusso è nullo? Qual è/sono la/le f.e.m. indotta/e a questo/i tempo/i?

**Esercizio 13.** In un induttore di 1,2 H la corrente varia nel tempo come $i(t) = e^{2t^2-3t+1}$, dove $i$ è espresso in ampere e $t$ in secondi.

a) Si trovi la forza elettromotrice indotta negli istanti $t = 3,0$ s e $t = 5,0$ s.

b) In quale istante la f.e.m. è nulla?

**Esercizio 14.** In una prova di laboratorio si deve verificare la legge di Lenz. Sul banco di lavoro ha collegato in serie una resistenza $R$, un condensatore $C$ e una batteria $V_0$. Al centro del circuito è posizionata una spira conduttrice circolare di raggio $r$, così quando si stacca la batteria dal circuito il condensatore si scarica generando una corrente indotta nella spira. Determinare l'espressione della forza elettromotrice indotta nella spira. Per semplicità si supponga che il campo magnetico che attraversa la superficie della spira sia perpendicolare al tavolo e abbia modulo $B = ki(t)$, dove $k$ è una costante, e $i(t)$ è la corrente che circola nel circuito $RC$.

## Riferimenti bibliografici

[1] Ugo Amaldi, 2015. *L'Amaldi per i licei scientifici.blu, Volume 3*, Zanichelli.

[2] J. D. Cutnell, K. W. Johnson, D. Young, S. Stadler, 2015. *I problemi della fisica, Volume 3*, Zanichelli.

[3] Claudio Romeni, 2012. *Fisica e realtà, Volume 3*, Zanichelli.

[4] Leonardo Sasso, 2015. *Nuova Matematica a colori, Volume 5*, Petrini.

[5] Serwey, Jewett, 2015. *Fisica per Scienze e Ingegneria, Volume 2*, Edises.

[6] Tipler, Mosca, 2010. *Corso di Fisica, Volume 2 - Elettricità Magnetismo Ottica*, Zanichelli.